Maria Inês Ribas Rodrigues | Natália Pimenta (Organizadoras)

Matemática

Nos caminhos das Ciências

O que é ser <u>cientista?</u>



Matemática e Física

Nos caminhos das Ciências



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Prof. Dr. Klaus Werner Capelle - Reitor Prof. Dr. Dácio Roberto Matheus - Vice-Reitor

(PROPG) Pró-Reitoria de Pós-Graduação

Prof. Dr. Gustavo Martini Dalpian - Pró-Reitor

Prof. Dr. Alexandre Hiroaki Kihara - Pró-Reitor Adjunto

(PROEC) Pró-Reitoria de Extensão e Cultura

Prof. Dr. Daniel Pansarelli - Pró-Reitor

Prof. Dr. Adalberto M. M. de Azevedo - Pró-Reitor Adjunto

Editora da UFABC

Prof^a. Dr^a. Adriana Capuano de Oliveira - Coordenação

Cleiton Fabiano Klechen

Natalia Gea

MARIA INÊS RIBAS RODRIGUES NATÁLIA PIMENTA

Organizadoras

Coleção

O que é ser cientista?

Uma iniciativa da PROPG e da PROEC

Matemática e Física

Nos caminhos das Ciências



São Bernardo do Campo - SP 2017

© Copyright by Editora da Universidade Federal do ABC (EdUFABC)

Todos os direitos reservados

Revisão

Michela Silva Moreira

Revisão Técnica

Ricardo Renato Rodrigues Victor Falção Artacho

Projeto gráfico, diagramação e adaptação da capa

Rita Motta, sob coordenação da Gráfica e Editora Copiart

Impressão

Gráfica e Editora Copiart

CATALOGAÇÃO NA FONTE SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC Responsável: Marciléia Aparecida de Paula CRB: 8/8530

Matemática e Física: nos caminhos das ciências / Organizado por Maria Inês Ribas Rodrigues, Natália Pimenta — São Bernardo do Campo, SP: EdUFABC, 2017.

vi, 264 p.: il. - (O que é ser cientista?)

Uma iniciativa da PROPG e da PROEC

ISBN: 978-85-68576-64-9

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Física – Estudo e Ensino. 3. Ciência – Estudo e Ensino. I. Rodrigues, Maria Inês Ribas, org. II. Pimenta, Natália, org. IV. Série.

CDD 22 ed. - 510.7

Sumário

Apresentação1					
CAPÍTULO 1					
Ciência divertida por meio do uso de experimentos práticos em sala de aula					
CAPÍTULO 2					
Geometria? Sem problemas, mas49 Virgínia Cardia Cardoso e Ricardo Benedito de Oliveira					
CAPÍTULO 3					
Os cientistas sempre concordam? Um "debate" no cenário do ensino de Física Moderna 117 Maria Inês Ribas Rodrigues e Natália Pimenta					

CAPÍTULO 4

existem?......143

Até onde vão os números? Por que eles

Robson Rodrigues de Almeida

Francisco José Brabo Bezerra, Liliana Quintero Lopez, Lídia de Souza da Cruz e Marcos Antonio Ruano
CAPÍTULO 5
Física para todos: alunos cegos também tem o direito de aprender!
Maria Inês Ribas Rodrigues, Ricardo Silva Salmazo e

Apresentação

Reunimos aqui profissionais interessados em promover e incentivar a aprendizagem de ciências, certos de que este assunto é um elemento importante para o desenvolvimento da autonomia e do senso crítico dos seus leitores, alunos do Ensino Médio e público em geral.

O emocionante mundo das ciências envolve os caminhos das descobertas, das invenções que sempre motivaram o ser humano a buscar seu desenvolvimento e a melhoria de tudo à sua volta. Assim, a busca por respostas leva-nos a enfrentar obstáculos que, em princípio, parecem intransponíveis, mas que no fundo, temos o sentimento de que somos capazes de superá-los.

Esse sentimento motiva-nos a seguir adiante e a escrever uma história, que transpassa os séculos e carrega os resultados das múltiplas respostas que se integram, contribuindo para o enriquecimento do nosso conhecimento. Cada um dos seres que passou pelo nosso planeta certamente contribuiu, de alguma forma, para a construção dessa rede, que envolve as diversas áreas do saber.

Neste livro, selecionamos alguns assuntos interessantes das áreas da Matemática e da Física, trazendo, em cada um dos capítulos, autores interessados em pesquisar formas de melhorar o ensino e a aprendizagem dessas disciplinas. São professores experientes que, a partir de um objetivo comum, enveredaram-se pela área da pesquisa em ensino das ciências, por pura fascinação. Ou ainda, pelo prazer de ver multiplicada a possibilidade de desenvolver nas pessoas o senso crítico e o prazer da construção do próprio conhecimento. Assim, os assuntos foram elencados em cinco seções, quais sejam:

No *Capítulo 1*, as autoras da área da Física, tanto do Ensino Médio quanto do superior, além da pesquisa em ensino, apresentam uma discussão sobre ciência e a alegria de aprender tanto na visão dos alunos, quanto dos professores, trazendo como exemplo alguns experimentos de Física e do Banco Internacional de Objetos Educacionais (BIOE).

No Capítulo 2, os autores, matemáticos e pesquisadores do ensino, apresentam um interessante texto que nos conta sobre a Geometria, uma das teorias mais antigas da humanidade, mostrando, por meio de sua história, a beleza do pensamento humano. Os autores apresentam os conceitos matemáticos relacionados à Geometria, não somente a partir dos problemas históricos que os originaram, mas também mostrando os seus aspectos práticos e lúdicos.

No *Capítulo 3*, pesquisadoras em ensino de Física trazem à discussão uma série de debates, conversas e cartas trocadas,

principalmente, entre os físicos Einstein e Bohr, no final da década de 1920 e início da de 1930. O contexto abordado pelas autoras é o interessante campo da Física Quântica e da Filosofia da Ciência, mostrando como os cientistas nem sempre concordam entre si e como isso pode ser (muito) bom.

No *Capítulo 4*, matemáticos e pesquisadores do ensino apresentam o fascinante mundo dos números e algumas de suas particularidades históricas. E, apostando que você sabe mais acerca deste conhecimento do que imagina, os autores contam, utilizando alguns exemplos e curiosidades, o percurso da construção dessa história.

No *Capítulo 5*, físicos e um cientista da computação reuniram-se para mostrar que a integração social é favorável ao desenvolvimento do conhecimento, tratando de dois assuntos que se interligam: uma proposta para o ensino de deficientes visuais e a resolução de problemas (PBL). Esse é, sem dúvida, um

assunto seríssimo, pois os alunos cegos não se encaixam nos padrões didáticos de uma aula expositiva, devido às dificuldades em atingir seus objetivos, uma vez que esse tipo de aula não atende a suas necessidades especiais. Por isso, os autores apresentam possibilidades didáticas para que todos os alunos possam interagir e aprender juntos.

Ciência divertida por meio do uso de experimentos práticos em sala de aula

Maria Inês Ribas Rodrigues¹
Alinic Vieira de Barros²
Paloma Alinne A. Rodrigues³

1.1 É possível aprender ciências de forma divertida?

Você conseguiria imaginar um cientista brincando em seu dia a dia? Saiba que o

¹ Professora Doutora do Programa de Pós-graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática da UFABC.

² Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática da UFABC.

³ Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática da UFABC. Doutoranda pela FEUSP e Professora da UNIFEI.

estímulo à maneira divertida de aprender não está restrito apenas ao Ensino Fundamental, e pode ser implementado em qualquer nível de ensino, com as devidas adaptações, como veremos mais adiante.

Apesar de pouco divulgado, Einstein defendia que o ensino de Ciências fosse desenvolvido com alegria, pois essa atividade encontraria ressonância na atuação do cientista e, também, buscaria o prazer na solução de problemas por meio da investigação. A partir dessas considerações, neste capítulo, abordaremos alguns exemplos ressaltados por Einstein acerca da aprendizagem mediada pelos "brinquedos".

No processo do ensino e aprendizagem, o professor tem um relevante papel: promover a aproximação entre os alunos e a ciência. Então, a habilidade de desenvolver atividades lúdicas e que envolvam a alegria deveria fazer parte da formação inicial do professor. E, pensando nesse aspecto, Einstein (1982,

p. 31) direciona a seguinte mensagem ao professor: "É tarefa essencial do professor despertar a alegria de trabalhar e de conhecer".

A brincadeira tem um valor pedagógico relevante e promove nos alunos o prazer pelo aprendizado. Os professores que já experimentaram desenvolver esse tipo de atividade confirmam esse resultado. No entanto, é necessário que o professor tenha um objetivo a ser alcançado, na construção do conhecimento junto aos seus alunos.

Einstein (1981) destaca que o papel das imagens e visualizações em geral constitui-se em um elemento relevante da própria construção do nosso pensamento. Segundo o autor, o cientista também coloca o exemplo como a melhor forma de ensinar: "Não existe uma educação mais inteligente senão aquela em que se toma a si próprio como um exemplo" (p. 30-31).



Figura 1 – Albert Einstein Fonte: (GNIPPER, 2016)

Ainda na infância, Einstein ganhou uma bússola de presente de seu pai. O cientista relata o sentimento de estranheza e de conflito causado pelo "brinquedo". A motivação surgira em compreender como era seu funcionamento.

Agora, experimentaremos uma proposta de outro "brinquedo" para comprovar um dos postulados de Einstein. Não nos aprofundaremos na teoria envolvida, pois a nossa intenção, já mencionada na introdução deste capítulo, é trazer alguns exemplos apresentados pelo cientista. Logo, o experimento será apresentado em duas versões, como veremos a seguir.

Um exemplo de brinquedo simples de ser realizado envolve o princípio da equivalência, postulado por Einstein em 1907. Esse postulado estabelece que a gravidade e a aceleração são indistinguíveis uma da outra, ou seja, não há um experimento que possa distinguir a aceleração ocasionada por um campo gravitacional da aceleração inercial devido a uma simples mudança de velocidade.

Veja como é interessante esse experimento!

Segundo o Princípio da Equivalência, massa inercial e massa gravitacional serão iguais, sendo um dos pilares de apoio à Teoria da Relatividade Geral.



Figura 2 – Simulação - Elevador de Einstein Fonte: (MEDEIROS, 2005)

Como proceder na realização deste experimento ("brinquedo")?

Segure um copo contendo dois furos em suas laterais, com água em seu interior. Enquanto o copo está sendo apoiado pelos lados, a água se escoa da forma com a qual aparece na Figura 2. No entanto, se largamos o copo, a água vai parar de escoar durante a queda, até que peguemos novamente o copo, estabilizando sua queda, e a água volte a escoar novamente.

Einstein ainda desenvolveu experimentos de pensamento ou, como apresentado na literatura, "gedankenexperiment" para analisar as interações físicas. Na sequência, apresentaremos um desses exemplos.

Como realizar o mesmo experimento, mas em pensamento? Experimente!

Para realizar o experimento de pensamento sobre o Princípio da Equivalência, imagine as seguintes situações:

a) Uma pessoa está dentro de um elevador fechado, sem contato algum com o exterior, e no último andar de um prédio alto. Caso o cabo que suporta o elevador venha a romper, passados alguns segundos, tanto a pessoa dentro do elevador quanto o elevador atingirão a mesma aceleração na queda. Após esse período, a pessoa dentro do elevador não sentirá a sua força peso; então, se ela soltar algum objeto

- da sua mão, este ficará flutuando no interior do elevador, e ela também flutuará.
- b) Uma pessoa está dentro de um elevador fechado, sem contato algum com o exterior e, "por um passe de mágica", esse elevador é transportado para um local do universo que não exista campo gravitacional. No mesmo instante, a pessoa dentro do elevador não sentirá sua força peso atuando e começará a flutuar dentro do elevador. Da mesma forma, se ele soltar algum objeto de sua mão, este também começará a flutuar.

Em ambas as situações, após passarem alguns segundos, as pessoas dentro dos elevadores não sentirão suas forças peso atuando. E, como elas não têm contato algum com a parte externa do elevador, não poderão dizer se estavam em queda livre sob a ação de um

campo gravitacional constante ou se estavam em algum local do Universo onde não existia campo gravitacional.

A partir dessa introdução sobre a relevância do ensino de Ciências por meio de atividades que promovam a alegria, discutiremos o percurso da história da implementação dessas atividades no ensino, assim como suas possiblidades.

1.2 Ciência divertida com o uso de experimentos em sala de aula

Discutiremos aqui, a importância da utilização dos experimentos em salas de aula da Educação Básica, que foi acentuada a partir de 1959, com o início da corrida espacial. Naquele momento histórico, os Estados Unidos da América (EUA) aliaram-se, principalmente, à Inglaterra, e se estruturavam para competir cientificamente com a União Soviética, porque esta havia lançado o primeiro *Sputnik* ao espaço, em 1957.

Na época, as estratégias de ensino nos países ocidentais foram questionadas, pois havia uma suposta superioridade no ensino de Ciências na União Soviética. Então, os Estados Unidos e a Inglaterra combinaram esforcos entre cientistas, educadores e professores do ensino médio, para aprimorar o ensino de Ciências. Como resultado, foram criados materiais didáticos inovadores, que possibilitavam aos alunos "praticar" ou "fazer" ciências através de um método científico. Alguns dos projetos são: Biological Science Curriculum Study (BSCS), Physical Science (PSCS),Curriculum Study Harvard Physics, Chem Study e Chemical Bond Approach (CBA). Com esses projetos, EUA e Inglaterra pretendiam formar cientistas e pessoas capazes de resolver problemas.

No Brasil, a partir da década de 1950, ou seja, antes da denominada "corrida espacial", já havia um esforço no sentido de desenvolver atividades que estimulassem o pensamento científico dos ingressantes no ensino superior, por meio do Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura (IBECC), criado em 1946.

IBECC era uma comissão da UNESCO no Brasil, com o intuito de melhorar a educação científica no país. Em 1952, foi implementada uma comissão paulista para o desenvolvimento de materiais pedagógicos impressos e também para atividades práticas de laboratório. Posteriormente, foram distribuídos nas escolas *kits* de materiais didáticos com propostas de atividades experimentais.

Apesar de tantos investimentos para o desenvolvimento do pensamento científico nos estudantes após a revolução industrial e a corrida de armamentos (que teve largada com a corrida espacial), a formação de professores não teve grandes mudanças. Manteve-se intacto o já velho sistema de produção em massa. Desse modo, a necessidade de maior quantidade de professores interfere na qualidade da formação desses profissionais.

O impacto desse momento histórico, de revoluções, ampliou nas licenciaturas o espaço curricular de disciplinas vinculadas à Psicologia e às práticas metodológicas. A expansão das matrículas na Educação Básica, a partir de 1971 no Brasil, exigiu também a expansão acelerada dos cursos de licenciatura, e alguns autores afirmam que na década de 1970 praticar (a docência) passou a ser sinônimo de "aprender novas técnicas instrumentalizadas de dar aulas".

Tornar o processo de ensino tecnicista, ou seja, mediado por "receitas" para o professor trabalhar demonstra que os investimentos no ensino de Ciências, devido às políticas para educação, não estavam caminhando em conjunto com a formação de professores, sendo que a necessidade urgente de se habilitar aqueles que estavam em sala de aula favoreceu a improvisação no preparo dos profissionais da educação.

Diferentemente do que se achava na época, acrescentar técnicas para o processo de ensinar não ajuda o professor a se tornar um profissional melhor. Hoje em dia, o pensamento é que o professor precisa seguir um caminho que o leve a ser um profissional reflexivo, mais completo, à medida que reflete sobre sua prática.

O professor que tem liberdade de criar, seja um experimento prático ou um experimento de pensamento, e que sabe mudar as suas metodologias, à medida que percebe o desenvolvimento da turma, está mais próximo de um profissional completo, visto que saberá analisar as situações e propor soluções para os problemas do cotidiano.

Portanto, se por um lado havia políticas para a implementação de melhorias para a educação em ciências, por outro, havia políticas que favoreciam a formação de professores em tempo reduzido, devido ao aumento do número de alunos nas escolas, a partir da

década de 1970. É importante destacar que esse desencontro de políticas dificultava o uso dos materiais disponibilizados para atividades experimentais no ensino de Ciências e, consequentemente, a formação dos alunos da Educação Básica.

Como a formação de professores não teve investimento compatível com o que estava sendo desenvolvido para ser trabalhado com os alunos em sala de aula, os professores ficaram por si só, livres para decidirem aplicar ou não atividades diferenciadas.

Considerando esse ponto de vista, é obviamente necessária a formação continuada desses professores das áreas de ciências, a fim de que aprimorem seus conhecimentos e se familiarizem com *kits* de experimentos científicos, implementando-os em suas aulas. Caso isso não ocorra, é inviabilizada a utilização de experimentos para grande parte dos professores – salvo para aqueles que buscam esse conhecimento por conta própria. Isso porque as

atividades práticas para o ensino de Ciências, incluindo a experimentação, desempenham um papel fundamental: possibilitam que os alunos aproximem-se do trabalho científico e tenham uma melhor compreensão dos processos de ação das ciências.

No entanto, além dos fatos já citados, é comum que os professores não utilizem atividades experimentais devido a inúmeros fatores, por exemplo: indisponibilidade ou qualidade de material; excessivo número de alunos em sala de aula; pouca bibliografia para orientá-los; indisponibilidade da sala de laboratório; necessidade de laboratorista; falta de atividades preparadas; ausência de tempo para o professor planejar e estruturar suas atividades, dentre outros.

Diante de todas essas justificativas que dificultam a implementação dos experimentos práticos em sala de aula, devemos lembrar-nos, também, de que existe dificuldade para o professor da Educação Básica

modificar sua metodologia de trabalho. Um professor pode defender o uso de experimentos; porém, na prática possuir dificuldades para implementar uma aula experimental.

Os professores até frequentam cursos de atualização e formação continuada, mas a maioria acaba voltando a lecionar como sempre fez, sem promover grandes mudanças, o que nos sugere que a incorporação de novas metodologias para ensinar vai além de identificar as deficiências no processo de ensino-aprendizagem.

No entanto, cabe salientarmos que a dicotomia teoria *versus* prática permeia os diferentes níveis de ensino, especialmente o ensino médio. Então, compreender os conteúdos curriculares relacionados ao ensino de Ciências pode ser, em alguns casos, difícil para aqueles que precisam "ver para crer" na hora de aprender.

Em alguns momentos da aprendizagem de ciências, pode haver dificuldades na comunicação entre professor e aluno, principalmente se não houver o uso da metodologia adequada para trabalhar com a turma. Os alunos podem tomar para si que não há como compreender o conteúdo trabalhado pelo professor, e recorrerem à memorização em momentos de avaliação. No entanto, como mencionaremos um pouco mais adiante, o uso de abordagens distintas pode alcançar um maior número de alunos.

Para alguns autores, o processo de aprendizagem inicial é assistemático e limitado, caracterizado pela exploração do tipo tentativa e erro. Logo, o papel do professor é auxiliar o aluno a amadurecer seu processo de aprendizagem, de modo que possa explorar os conhecimentos de um modo sistemático, organizado e mais significativo.

E por falar em "explorar", esta palavra talvez devesse ser mais utilizada na teoria e na prática pelos professores e alunos. Os alunos normalmente trazem para a escola noções já estruturadas com uma lógica própria e coerente sobre diversos fenômenos, com uma sequência de explicações que dão sentido a tudo que convivem diariamente. Assim, tentar ensinar ciências sem utilizar esse conhecimento próprio desvincula os fenômenos do cotidiano dos que são explicados na sala de aula.

Como seria se o aluno pudesse explorar os seus conhecimentos próprios sobre algum fenômeno que será estudado em sala com o professor? E se fosse dada a oportunidade de o aluno contar tudo o que pensa sobre determinado assunto? Mas o aluno poderia pensar: "será que posso contar até as coisas mais extravagantes que imagino apenas para mim?". Sim! Sem censuras científicas!

Será que a essa "exploração" das ideias dos alunos não é dado o nome de "problematização"? Problematizar é um termo que está sendo muito utilizado. Todavia, o que o professor tem por objetivo quando propõe que o aluno problematize sobre algo? Entre muitas

interpretações acerca desse termo, em geral, o que ele está propondo é "explorar o assunto em pauta", de acordo com os conhecimentos que o aluno já possui.

Cabe, então, ao professor, formular as questões aos alunos e/ou criar estratégias pedagógicas, cuja tarefa seja permitir a compreensão de que grande parte dos conhecimentos sobre fenômenos naturais está relacionada ao senso comum, não tendo, portanto, um fundamento científico.

Nas aulas de termodinâmica, por exemplo, quando o professor propõe falar sobre o conceito de *calor*, a aula pode ser conduzida de muitas maneiras; uma delas, é problematizando a questão com os alunos. Assim que os conhecimentos prévios forem expostos, o professor pode ir lapidando as informações propostas sobre o assunto pelos alunos, de forma que caminhe para chegar o mais próximo possível do conhecimento científico aceito atualmente. Evidentemente, nesse

processo, se o professor não for paciente, poderá querer simplificar expondo, de uma vez por todas, em um único parágrafo, o conceito científico sobre calor e acabar com tantas indagações dos alunos sobre o tema. Contudo, se o professor aprender a abordar os alunos, a partir de suas próprias colocações sobre o assunto, e elaborar questões que os permitam refletir sobre o que os próprios afirmaram, pode surgir aí uma confusão. E esta, sem dúvida, produzirá a aprendizagem. Um outro exemplo seria questionar sobre o que seria o frio. O que é o frio? As respostas, as mais variadas, serão o ponto de partida para o professor incentivar os alunos a desenvolverem seus conhecimentos prévios rumo aos conhecimentos científicos sobre o calor.

É importante destacarmos que há uma semelhança entre a aprendizagem artística e a científica, pois a representação da realidade e a explicação fazem parte de ambas. Nas aulas de Artes, normalmente há liberdade para o aluno representar, enquanto nas aulas de Ciências falta esse espaço. Estas aulas, portanto, deveriam ser um lugar em que o aluno pudesse livremente representar suas interpretações sobre fenômenos que fazem parte do conteúdo trabalhado em sala de aula.

Assim, percebemos que a diferença entre ambas as aprendizagens, artística e científica, está na razão que permeia o conhecimento científico. Por exemplo, para os alunos compreenderem o conceito de energia cinética das moléculas, também ligado à termodinâmica, eles poderiam representar como o entendem. O professor, por sua vez, poderia utilizar recursos computacionais de simulação para guiar os alunos a construírem uma nova representação, que ainda fosse compreendida por eles, porém que estivesse mais próxima possível do conceito cientificamente aceito.

É possível, então, que o caminho entre o conhecimento prévio dos alunos e o conhecimento científico possa ser construído por

eles se houver essa liberdade de exploração, discussão e de representação, implicando em maior participação para a aprendizagem.

Até mesmo a Ciência formal, que é apresentada hoje nos livros, com afirmações indiscutíveis e que, por vezes, parecem triviais, foi construída por meio de esquemas de representação da realidade, os quais eram aceitos em cada época. E o que ocorre em sala de aula, atualmente, é a apresentação dos conceitos científicos, sem haver uma participação do aluno na construção das ideias envolvidas nos fenômenos. Os alunos habitualmente não tem a "missão" de: investigar, analisar, desvendar. Parece que tudo está pronto! E está? Como o professor e o aluno vão construir esse caminho?

Um dos obstáculos para o aprendizado das Ciências é a linguagem; portanto, o uso da Matemática, para expressar fenômenos científicos, é imprescindível por tornar mais simples a compreensão desse conhecimento.

Mas como é para um aluno entender uma equação matemática que explica um fenômeno da natureza, se muitas vezes, apenas ao olhar para uma equação, ele já desvia a atenção, acreditando não ser capaz de entender esse tipo de coisa?

Retomando o exemplo citado anteriormente sobre uma aula de termodinâmica na qual se propõe discutir o conceito de calor, se houver uma problematização, e por meio dela o professor consiga fazer as perguntas certas, instigando os alunos a pensarem sobre o assunto e a formularem seu conhecimento para discussão, eles começarão a participar da sua própria aprendizagem.

Uma das possibilidades seria o professor partir pelas ideias que existem por trás dessa equação matemática, explicando bem qual fenômeno será estudado – questionando quais os conhecimentos que os alunos possuem, permitindo que interajam com algum experimento ou ainda com uma simulação

computacional, que demonstre mais concretamente o fenômeno a ser estudado e sua relação matemática. Uma outra estratégia seria o professor apresentar a equação, e partindo dela, demonstrar como os fenômenos ocorrem, justificando o modelo da fórmula para os alunos. As relações diretas e indiretamente proporcionais que envolvem o estudo do fenômeno em questão.

De todo modo, envolver o aluno na (re)descoberta de um fenômeno é o que fará a diferença para a aprendizagem, é o que poderá torná-lo protagonista da sua construção de conhecimentos, permitindo que adquira a habilidade de explorar. E, em Ciência, há muito a explorar!

As atividades práticas permitem maior interação entre professores e alunos, e a diversidade de metodologias pedagógicas sempre é preferível a uma única abordagem. Essa diversidade de metodologias pode ter em seu cerne o uso de: experimentos demonstrativos,

experimentos investigativos, aula com discussão em grupo etc.

Despertar a curiosidade dos alunos é uma tarefa desafiadora para o professor, principalmente considerando a individualidade de cada um que desperta para o conhecimento de maneiras distintas. Por outro lado, é importante compreendermos que, ao diversificar os métodos de ensino, o professor pode alcançar uma quantidade maior de alunos.

No entanto, no cotidiano escolar, sabemos que não é fácil para um professor dispor de diversas estratégias metodológicas. Em relação a essa dificuldade, cabe salientarmos que os motivos são diversos. Entre os mais preponderantes, destacam-se: a falta de recursos para o desenvolvimento de experimentos práticos, a falta de tempo disponível para preparar atividades diferenciadas, laboratórios de informática em mau estado ou até mesmo inviabilizados.

Todavia, não é necessariamente obrigatória a presença de um laboratório sofisticado para desenvolver atividades experimentais. O essencial é o envolvimento dos alunos na busca por respostas ou soluções para uma questão colocada em sala, em atividades que podem ser apenas de pensamento. O uso de atividades por meio das quais os alunos busquem a representação da ideia que está sendo trabalhada em sala de aula é o que importa para o envolvimento dos alunos na construção do conhecimento. Como exemplo, podemos citar uma aula de Física na qual o objetivo é compreender como a corrente elétrica atravessa um condutor. Podemos utilizar o modelo atômico de Bohr, para o qual os alunos do Ensino Médio já foram apresentados nas primeiras aulas de química. Neste modelo os elétrons estão orbitando ao redor do núcleo do átomo, formado por nêutrons e prótons.

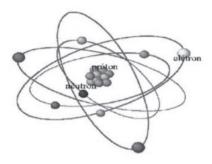


Figura 3 – Modelo Atômico de Bohr Fonte: www.copiadaweb.com.br

Caracterizando os elétrons livres, presentes nos materiais condutores, podemos trabalhar as situações com experimentos de pensamento, de forma que os alunos compreendam que a corrente elétrica nada mais é do que o movimento desses elétrons na direção do maior potencial, ou polo positivo.

Outra maneira de incentivar os alunos a participarem da construção de seu conhecimento científico é utilizar os recursos pictóricos ou qualquer atividade que o permita representar e expor seu raciocínio, além de recursos computacionais que auxiliam na visualização dos fenômenos mais abstratos – o de corrente elétrica, por exemplo.

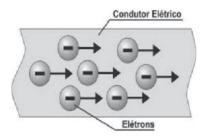


Figura 4 - Ilustração do movimento dos elétrons num fio condutor Fonte: www.netfisica.com

Por esse motivo, as aulas de Educação Artística são comumente mais agradáveis para os alunos do que as aulas de Ciências, já que nas aulas de Educação Artística, os alunos têm liberdade de trabalho e de criação. E, como se sabe, eles não encontram essa liberdade em outras aulas, principalmente, nas de

Ciências. Dessa forma, torna-se fundamental introduzir e articular experimentos práticos ao plano de aula.

Permitir que os alunos desenvolvam a autonomia também colabora para que habilidades básicas sejam desenvolvidas – tais como: observar, classificar, questionar e levantar hipóteses – visto que são fundamentais para o desenvolvimento de outras habilidades mais complexas da aprendizagem formal – por exemplo: planejar, prever e interpretar dados.

Consideramos que o ensino de Ciências passará a ser mais divertido e interessante para o aluno se houver o emprego de diversas estratégias de ensino. Assim, destacamos a relevância dos repositórios educacionais que aperfeiçoam o tempo de busca e a localização dos materiais, e disponibilizam diferentes tipos de recursos pedagógicos, como hipertextos, livros, multimídia, simulações, animações, e, em especial, experimentos práticos para serem implementados em sala de aula.

No próximo tópico, trataremos sobre como as tecnologias podem auxiliar na questão da aprendizagem divertida, destacando resultado de uma pesquisa realizada numa escola pública na região de Santo André.

1.3 Repositório educacional: banco internacional de objetos educacionais

Você sabia que o seu computador pode ser entendido como um repositório? É comum armazenarmos diversas informações em nosso computador, não é verdade? Guardamos nele fotos, textos, jogos, músicas, vídeos, entre outras coisas. E, geralmente, esses dados ficam em pastas com o objetivo de manter a organização do nosso computador. No entanto, nem sempre isso acontece. Há pessoas que deixam uma quantidade significativa de arquivos na área de trabalho! No entanto, quando falamos de repositório, é importante entendermos que, quanto mais organizado ele estiver, melhor será para

localizar um determinado recurso. Isso também se aplica ao nosso computador!

Mas, voltando ao assunto... Com o objetivo de auxiliar o professor a localizar diferentes recursos para utilizar em suas aulas, o Ministério da Educação (MEC), em parceria com outras instituições, desenvolveu três repositórios.

O primeiro repositório chama-se Rede Interativa Virtual de Educação (RIVED) que produziu animações e simulações de Física e Matemática. Bacana, não é mesmo? É comum ouvir que a Física e a Matemática são complexas; mas, a partir do momento em que você usar animações e simulações, é possível compreender, de forma lúdica, os conceitos abordados pelo seu professor.

O segundo repositório é o Portal do Professor, que possui um acervo rico com diferentes formatos de recursos educacionais e planos de aulas que auxiliam os professores a construírem estratégias didáticas de acordo com a realidade escolar de cada um. E o terceiro repositório é o Banco Internacional de Objetos Educacionais (BIOE), lançado em 2008 e que disponibiliza aproximadamente 19.840 recursos (Figura 5). Viu só, quantos recursos?!

Os recursos pedagógicos disponíveis no BIOE são denominados de Objetos Educacionais (OE), visam a potencializar o processo de ensino e aprendizagem e podem ser reutilizados em diferentes momentos, ou seja, o seu professor pode utilizar hoje, amanhã e depois de amanhã. Esses recursos foram localizados, selecionados e catalogados por alunos de diferentes universidades públicas. Nessa perspectiva, esse repositório possui a finalidade de organizar e armazenar tais OE, possui qualidade pedagógica e está disponibilizado em diferentes mídias e formatos



Figura 5 - Interface do Banco Internacional de Objetos Educacionais (BIOE) Fonte: http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/

No que concerne aos experimentos práticos catalogados e que podem ser utilizados pelos professores em sala de aula, cabe destacarmos que o BIOE disponibiliza aproximadamente 1.768 recursos. Sua aula de Física ficará muito mais interessante, pois há uma enorme quantidade de experimentos práticos que o professor pode realizar na escola. Já pensou sobre isso? Uma parcela significativa desses experimentos pode ser realizada com o uso de materiais de baixo custo, não havendo, assim, necessidade de laboratórios sofisticados. Veja só: esse é mais um motivo para que o professor articule esses recursos ao seu plano de aula, ao invés de utilizar apenas o livro didático. Por que pensamos assim?

Este assunto foi o tema de pesquisa de mestrado que visava analisar a formação de uma professora de Física, de uma escola pública da cidade de Santo André, em São Paulo, para o uso do repositório educacional do BIOE. Assim, mediante aplicação de um

questionário a 75 alunos, de duas turmas do 3º ano do Ensino Médio, verificou-se que, em determinados casos, o recurso didático mais utilizado pelo professor ainda é o livro didático, como demonstra o Gráfico 1



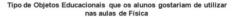
Gráfico 1 – "Qual recurso à professora de Física utiliza com frequência?" Fonte: (RODRIGUES, 2012)

No entanto, cabe destacar que o uso excessivo do livro didático não incita discussão e não leva o aluno a refletir sobre o tema proposto, mas simplesmente o convida a memorizar fórmulas, termos científicos e definições.

Logo, o livro didático é uma opção menos atraente para o aluno, que ao sair do perímetro da instituição escolar encontra, por exemplo, informações atrativas e interessantes nos meios tecnológicos. Compreendemos que o livro didático configura-se como um suporte ao professor para abordar os conteúdos curriculares. Entretanto, ele não deve apoiar-se apenas em um instrumento de ensino; mas, podem utilizar múltiplos e diferenciados recursos, a fim de suscitar no aluno o interesse pelo ensino de Ciências.

A pesquisa ainda revelou o desejo dos alunos para que esse cenário seja modificado, uma vez que 64% dos alunos demonstraram ter interesse pelo uso dos experimentos práticos em sala de aula. Isso é evidenciado no Gráfico 2.

Por isso, consideramos que a participação de OE em sala de aula contribui de forma significativa para mudar a educação, uma vez que você pode estimular o professor a aprimorar a sua prática pedagógica e a utilizar outros recursos durante a aula. A aprendizagem dos conceitos científicos necessita ser prazerosa e o uso de experimentos práticos pode contribuir para que haja uma maior compreensão. Sob esse enfoque, consideramos que o uso do repositório educacional do BIOE seria uma excelente alternativa para motivar tanto você quanto o seu professor a estabelecer um ambiente de cooperação e aprendizagem, assim como para potencializar o uso dos experimentos práticos nas aulas relacionadas ao ensino de Ciências.



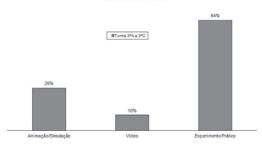


Gráfico 2 – "Qual tipo de OE você gostaria que o professor de Física utilizasse em sala de aula?" Fonte: (RODRIGUES, 2012)

1.4 Conclusões

Sim! O ensino de ciências pode e deve acontecer de forma divertida. Todavia, sua implementação em sala de aula depende de outros fatores, principalmente da melhoria na formação dos professores. Como podemos ensinar ciências de uma só forma, se os alunos possuem conhecimentos distintos sobre sua vivência diária, que os levam a construir diferentes formas de ver um mesmo fenômeno da natureza?

Ao mesmo tempo, ouvir o que nossos alunos têm a nos dizer é prioritário, como já longamente estudado no campo do ensino e aprendizagem das ciências, ajudando-nos a apontar melhores caminhos a seguir em cada um dos contextos.

Finalizando, gostaríamos de ressaltar a relevância das pesquisas na área de ensino e aprendizagem, uma das formas de apontar novos rumos para o ensino de ciências, talvez uma das melhores.

Referências

BORGES, Antônio Tarciso. Novos rumos para o laboratório escolar de Ciências. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 9, n. 3, p. 291-313, dez. 2002.

CASTELLANI, Otávio Cesar. Discussão dos conceitos de massa inercial e massa. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 23, nº 3, p. 356-359, set. 2001, Disponível em: http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v23_357.pdf>. Acesso em: 11 abr. 2016

CARVALHO, Anna Maria Pessoa de. *Ensino de Ciências*: unindo pesquisa e prática. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

DOWNES, Stephen. *Design and reusability of learning objects in an academic context:* a new economy of education? Moncton: National Research Council, 2002.

EINSTEIN, Albert. *Como vejo o mundo*. Tradução de Mein Weltbild. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1981.

FINO, Carlos Nogueira; SOUZA, Jesus Maria. As TIC abrindo caminho a um novo paradigma educacional. Departamento de Ciências da

educação da Madeira. 2001. Disponível em: http://maratavarespsictics.pbworks.com/w/file/fetch/74430542/4-AsTICabrindocaminhoaumno voparadigmaeducacional.pdf>. Acesso em: 19 fev. 2016.

FOURÉZ, Gérard. Crise no ensino de Ciências. *Investigações em Ensino de Ciências*, v. 8, n. 2, p. 109-123, ago. 2003.

GIL PÉREZ, Daniel et al. Tiene sentido seguir distinguiendo entre aprendizaje de conceptos, resolución de problemas de lápiz e papel y realización de prácticas de laboratorio?. *Ensenãnza de las Ciencias*, v. 17, n. 2, p. 311-320, 1999.

GNIPPER, Patrícia. Há 137 anos nascia Albert Einstein, um dos maiores gênios da ciência moderna. 14 mar. 2016. *Canaltech.* http://canaltech.com.br/materia/personalidades/ha-137-anos-nascia-albert-einstein-um-dosmaiores-genios-da-ciencia-moderna-59821/>. Acesso em: 22 mar. 2016.

LABURÚ, Carlos Eduardo; BARROS, Marcelo Alves; KANBACH, Bruno Gusmão. A relação com o saber profissional do professor de física e o fracasso da implementação de atividades

experimentais no ensino médio. *Investigações em ensino de ciência*, v. 12, n. 3, p. 305-320, 2007. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID172/v12_n3_a2007.pdf>. Acesso em: 19 fev. 2016.

MEDEIROS, Alexandre; MEDEIROS, Cleide Farias de. Einstein, a física dos brinquedos e o princípio da equivalência. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 22, n. 3, p. 299-315, dez. 2005.

NASCIMENTO, Anna Christina Aun de Azevedo. Aprendizagem por meio de repositórios digitais e virtuais. In: LITTO, Frederic Michael; FORMIGA, Manuel Marcos Maciel (Org.). *Educação a distância:* o estado da arte. São Paulo: Person Educacion do Brasil, 2009. p. 352-357.

PIETROCOLA, Maurício. Curiosidade e imaginação – os caminhos do conhecimento nas ciências, nas artes e no ensino. In: CARVALHO, Anna Maria Pessoa de (Org.). *Ensino de Ciências:* unindo a pesquisa e a prática. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

RODRIGUES, Paloma Alinne Alves . A utilização do Banco Internacional de Objetos Educacionais para a formação de professores de física do Ensino

Médio no munícipio de Santo André. 2012. 182 f. Dissertação (Mestrado em Ensino, História e Filosofia das Ciências e da Matemática) – Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André, 2012.

ROSITO, Berenice A. O ensino de Ciências e a experimentação. In: MORAES, Roque (Org.). *Construtivismo e ensino de ciências:* reflexões epistemológicas e metodológicas. Porto Alegre: EDIPUCRG, 2008. p. 195-208.

TAROUCO, Liane Margarida Rockenbach; FABRE, Marie-Christine Julie Mascarenhas; TAMUSIUNAS, Fabrício Raupp. Reusabilidade de objetos educacionais. *Revista Novas Tecnologias na Educação*, Porto Alegre, v. 1, n. 1, fev. 2003.

WARD, Helen; RODEN, Judith; HEWLETT, Claire; FOREMAN, Julie. *Ensino de Ciências*. Porto Alegre: Artmed, 2010.

Geometria? Sem problemas, mas....

VIRGÍNIA CARDIA CARDOSO¹ RICARDO BENEDITO DE OLIVEIRA²

À Carolina: que passou a levar os problemas da Geometria muito a sério!

Mas.... Com você não é bem assim? Você tem problemas com a Geometria? Se tem, fique tranquilo! Isso é mais comum do que você pensa. A humanidade inteira teve e tem problemas com a Geometria... E ainda bem, pois qualquer ciência somente se desenvolve

¹ Professora Doutora do Programa de Pós-graduação em Ensino e História das Ciências e Matemática.

² Mestrando do Programa de Pós-graduação em Ensino e História das Ciências e Matemática.

a partir de problemas! Certamente não vamos acabar com seus problemas, mas queremos que você não fique desanimado com eles. E, para isso, contaremos um pouco acerca do desenvolvimento histórico dessa ciência.

Desde a pré-história, o ser humano tem problemas para resolver que eram relacionados à garantia de sobrevivência do indivíduo e da espécie, como por exemplo: caçar, coletar frutas, conseguir água para beber, achar um local protegido para dormir. Para conseguir sobreviver, o homem precisou desenvolver a capacidade de observar a natureza e suas regularidades. Reconhecer as formas geométricas, estimar as distâncias percorridas, construir utensílios e ferramentas foram capacidades desenvolvidas desde os primórdios da espécie humana, com vistas a garantir as condições mínimas para a sobrevivência.

Você já olhou atentamente para a lua cheia? E para uma laranja? E para as ondas formadas em um lago quando se atira uma pedrinha nele? Você pode perceber que todas essas imagens têm uma forma geométrica comum: uma forma circular. Podemos notar certas regularidades que são formas geométricas em muitas ocorrências na natureza. Desde muito cedo, o ser humano notou isso e tratou de reproduzir as formas que observava em objetos que fabricava, tais como potes de cerâmica usados para armazenar água.

Com os progressos obtidos, as pessoas passaram a viver em grupos cada vez maiores, em sociedades organizadas de modos bastante variados. E novos problemas foram surgindo – tais como: cercar terrenos para os animais de criação e para as hortas; construir moradias; manufaturar adornos –, relacionados às atividades humanas que envolvem conhecimentos de forma e medida. De geração para geração, as práticas bem-sucedidas foram aperfeiçoadas e os conhecimentos sobre as formas e medidas foram ampliados. Com o passar do tempo, os problemas foram se

sofisticando. Por exemplo: construir um templo ou um palácio grandioso que enaltecesse uma divindade ou um rei; cobrar impostos de alguém que ocupava um pedaço de terra para plantar; calcular a área a ser cultivada, para que a produção agrícola fosse suficiente para alimentar a população de uma cidade inteira. Todos esses problemas deveriam ser resolvidos de modo otimizado para garantir uma vida com segurança e justiça. Perceba que todos eles envolvem, de alguma maneira, conhecimentos de Geometria: medir distâncias e ângulos, calcular áreas e volumes, conhecer as formas mais estáveis.

Uma vez que a sobrevivência estava garantida, o ser humano começou a formular sistematizações do conhecimento, que deram origem a teorias para explicar os fenômenos que observava no seu ambiente. Entre elas, estavam as teorias geométricas. Assim, podemos afirmar que a Geometria é um conjunto de teorias. Algumas tiveram origem na

pré-história; outras tiveram desenvolvimento mais tardio; outras são muito recentes na história da humanidade. Mas sempre esses conhecimentos visavam a resolver problemas, tanto práticos, quanto teóricos.

Apresentaremos alguns episódios históricos que, apesar de não darem um panorama completo sobre as teorias geométricas, permitem um vislumbre da importância delas para a humanidade. Partiremos sempre do seguinte princípio: a Geometria é um conjunto de conhecimentos, constituídos pelo ser humano para resolver problemas práticos, teóricos, técnicos ou científicos. Tais conhecimentos não foram construídos por apenas uma pessoa, somente por uma mente brilhante. Ao contrário! A Geometria, assim como qualquer ciência, desenvolveu-se por meio de contribuições de muitas pessoas - construtores, carpinteiros, astrônomos, matemáticos, cientistas de diversas áreas - em um caminho que é formado de sucessos e fracassos, tentativas e erros.

Nos tópicos a seguir, queremos mostrar a você alguns aspectos da Geometria que nem sempre são abordados na escola. Em cada um dos tópicos tratamos de um aspecto especial na seguinte ordem: aspecto lúdico, aspecto estético, aspecto científico, aspecto místico e, finalmente, o aspecto formal.

Vamos começar?

2.1 Como medir a altura de uma pirâmide egípcia

Nossa história começa na Antiguidade, na cidade de Mileto, colônia grega localizada na região da Jônia (onde atualmente é a Turquia). Thales de Mileto foi um sábio grego que viveu por volta do século VII a.C., considerado o primeiro personagem histórico reconhecido como "matemático"; porém, não sabemos muito sobre sua vida. Informações não comprovadas o retratam como sábio, matemático e astrônomo. Em épocas muito antigas, as divisões entre as ciências não eram tão

rígidas como são atualmente. Geralmente, os eruditos estudavam várias ciências ao mesmo tempo.

Considerando que dificilmente há informações históricas exatas sobre as pessoas que viveram em uma época tão longínqua, por falta de registros precisos que sobrevivam ao tempo, toma-se como verdadeiro os fatos narrados por mais de uma fonte histórica que também seja antiga. No caso de Thales, sabemos que ele, de fato, existiu porque foi citado em diferentes livros antigos.

Tudo indica que Thales de Mileto veio de uma família rica de comerciantes, e que ele viajou ao Egito, em diversas ocasiões, para vender azeite de oliva – uma mercadoria muito apreciada pelos povos mediterrâneos. Assim, entrou em contato com as práticas e os conhecimentos egípcios. E como você já deve desconfiar, os egípcios eram excelentes em Geometria; afinal, eles conseguiram realizar as construções mais imponentes e monumentais

da época antiga – as pirâmides –, e esse tipo de trabalho exige muitos conhecimentos geométricos.

Contudo, entre os egípcios, havia um problema matemático que desafiava os sábios da época: medir a altura de uma pirâmide já construída. O problema não tinha um interesse prático imediato; porém, uma vez formulado começou a fazer "cócegas" nas mentes brilhantes da época.

Como se mede o comprimento, largura ou altura de uma construção? Atualmente usamos uma trena. Naquele tempo, os egípcios usavam um instrumento parecido. Uma corda, com marcas de comprimento ou nós, que era um instrumento comum de medida, conhecido desde épocas remotas. Para medir a extensão de uma parede, eles prendiam a extremidade da corda em uma ponta e a esticavam até a outra ponta, verificando quantas unidades usavam.

Para os egípcios, a questão da medida da altura da pirâmide ("h" no esquema na

Figura seguinte) era difícil. Não é possível esticar cordas por dentro da pirâmide, de cima a baixo, visto que a pirâmide é toda preenchida com terra e pedras, sem caminhos diretos do topo à base.

L= aresta lateral da pirâmide;

I = aresta da base;

A = altura da face inclinada;

h = altura da pirâmide.

a = apótema da pirâmide

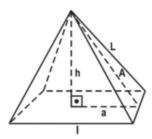


Figura 1 – Pirâmide de base quadrada Fonte: Siqueira (2012)

Com os conhecimentos que temos atualmente, esse problema é relativamente simples

de ser resolvido. Mas, lembre-se de que falamos sobre uma época muito remota, quando a ciência engatinhava e os conhecimentos desenvolvidos tinham um caráter empírico e prático. Assim, dificilmente alguém se preocupava com algo que não tivesse aplicações imediatas.

A resolução dada por Thales foi simples, elegante e permitiu que muitos problemas similares fossem resolvidos, dando origem a um conhecimento teórico e principiando a construção de uma grande ciência: a Geometria. A partir de então, esta passou a ser proeminente entre os sábios gregos.

Juntando seus conhecimentos geométricos e astronômicos, Thales imaginou a seguinte solução: traçou na areia, próximo à pirâmide, um círculo em cujo centro fincou seu cajado. E o raio do círculo ficou com a mesma medida da altura do cajado. Considerou, por hipótese, que dois raios solares chegam à Terra paralelamente (isso não é verdade, mas

podem ser considerados paralelos devido à distância do Sol à Terra).

Assim, Thales pôde observar as sombras que o cajado e a pirâmide faziam no solo. Então, esperou um horário, conforme a posição do sol, em que a sombra do cajado era igual à sua altura, isto é, a sombra atingiu a marca do círculo na areia. No mesmo momento, ordenou que seus auxiliares medissem o comprimento "s" da sombra da pirâmide. Somou à essa medida, metade do lado da base da pirâmide, obtendo o resultado "s + b/2".

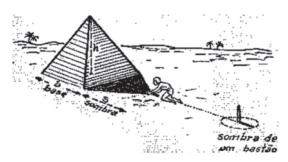


Figura 2 – A técnica de Thales para medir a altura da pirâmide através da sombra Fonte: HOGBEN, 1952, p. 156.

Segundo o raciocínio de Thales de Mileto: se a sombra do cajado era igual à altura do cajado, o resultado da soma (a sombra da pirâmide + metade da base da pirâmide) seria igual à altura da pirâmide.

No esquema a seguir, observe que estamos comparando dois triângulos semelhantes: ΔVHB, que representa o topo da pirâmide (ponto V), a base da pirâmide (ponto H) e a extremidade da sombra da pirâmide (ponto B); e ΔABC, que representa a extremidade do cajado (ponto A), o ponto onde foi fincado no solo (ponto B) e a extremidade de sua sombra (ponto C). Os dois triângulos são semelhantes, pois o ângulo formado pelas alturas e o solo são retos, e consideramos os raios solares paralelos (a hipótese de Thales). Logo, figuras semelhantes podem ser de tamanhos diferentes, mas preservam a proporção entre seus lados.

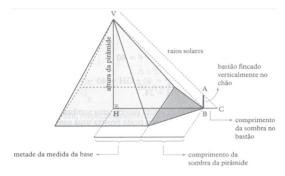


Figura 3 – Comparando triângulos semelhantes Fonte: Pereira (2011).

Se AB = BC no \triangle ABC, então HB = HV no \triangle VHB e HB = s+b/2 . Logo, a altura da pirâmide VH = s+b/2.

Thales conseguiu fazer a medida desejada usando uma estratégia muito simples, baseada na Semelhança de Triângulos; com isso, deu origem a estudos sobre a semelhança, importantíssimos na Geometria.

Você já deve ter ouvido falar desta propriedade: "dois triângulos são semelhantes se seus lados correspondentes são proporcionais". Essa propriedade não era conhecida nos tempos de Thales, mas é decorrência de outra, que foi aplicada, intuitivamente, por ele: "retas paralelas cortadas por duas retas transversais definem segmentos proporcionais". Essa segunda recebeu o nome de Teorema de Thales, em homenagem a esse grande matemático.

A importância histórica de Thales de Mileto não se deve apenas ao episódio anteriormente narrado, pois as primeiras demonstrações matemáticas também são atribuídas a ele. Apresentando um modo de pensar incomum para a época, esse sábio indicou um caminho novo para o desenvolvimento da Geometria: o teórico. E pensar que isso começou com o interesse de um homem em resolver um problema lúdico e desafiador!

2.2 Do pentagrama pitagórico às pinturas de Leonardo da Vinci

Teorias são organizações sistematizadas de conhecimentos matemáticos que implicam

em demonstrações dos resultados obtidos. Atribuímos a Thales as primeiras demonstrações matemáticas e aos Pitagóricos as primeiras teorias. Vamos destacar um dos resultados mais bonitos da Geometria pitagórica: a razão áurea

Para começo de conversa, você sabe quem foi Pitágoras e os Pitagóricos? Pitágoras foi um sábio grego, nascido na ilha de Samos, por volta do século V a.C. Porém, sua existência não é comprovada pelas fontes históricas. Ao contrário, as fontes apontam para a existência de um grupo de estudiosos, autodenominados de "pitagóricos" – supostamente, eram os seguidores de Pitágoras – que desenvolveram teorias matemáticas e outros resultados, tanto científicos como místicos, imprimindo um caráter filosófico e elitista a esses estudos.

Na época – século V a.C. – a Grécia passava por um amplo desenvolvimento cultural, científico, político, econômico e social.

Atenas, importante cidade grega, é considerada o berço da democracia (poder do povo) e da filosofia (amor à sabedoria). Não podemos entender as palavras "democracia" e "filosofia" no sentido atual. Democracia, atualmente, é um regime político onde todos os cidadãos de uma nação podem votar ou elegerem-se para o governo, e todos têm seus direitos respeitados e deveres prescritos em leis. Na antiga Atenas, a democracia valia para uma parcela pequena da sociedade. Apenas os homens da elite eram considerados "cidadãos". Reunidos na ágora (praça pública), os cidadãos podiam discutir os problemas sociais, políticos e econômicos da cidade, votar em seus representantes ou serem eleitos para o governo. As demais pessoas (mulheres, pobres, estrangeiros e escravos) não tinham direito político algum. Apesar de considerarmos essa "democracia" muito restritiva, em uma perspectiva histórica ela foi um grande avanço, quando comparada a outras nações antigas nas quais apenas o rei, imperador ou o faraó tinham direitos políticos, e o restante da população não tinha direito algum.

O debate político exigia uma capacidade de argumentação e de ordenação do pensamento que vai além do necessário para as
tarefas cotidianas. Assim, surgiram grupos
com interesses em estudar, com mais profundidade, a natureza, o indivíduo e a sociedade.
Esses grupos eram liderados por sábios que
desenvolviam, com seus pupilos, formas peculiares de estudo e conhecimento. Desenvolviam o amor à sabedoria: a filosofia. Diferentes escolas filosóficas foram constituídas,
com explicações próprias para os fenômenos
da natureza e para os comportamentos humanos, ditando formas de conduta.

Para os gregos, a Matemática tinha um significado especial. A palavra grega "mathema" tem relação com cognição, pensamento lógico e ordenado. "Tica" vem da palavra grega "thecne": prática, técnica, modo de fazer.

Assim, um significado aproximado para "Matemática" seria o de técnica de pensar logicamente. Ou seja, a Matemática seria uma prática de desenvolver o pensamento lógico, de ampliar a capacidade cognitiva dos estudiosos. E, por isso, era empregada em algumas das escolas filosóficas, como parte do aprendizado. Os pitagóricos valorizavam muito a Matemática.

As escolas filosóficas mais tradicionais explicavam os fenômenos naturais por meio das interações entre os elementos da natureza: o fogo, a água, o ar e a terra. Para os pitagóricos, a natureza poderia ser explicada por meio da noção de número e das relações que poderiam ser compostas com números naturais³: 1, 2, 3, 4, 5 etc. Daí a importância que davam à Aritmética. O lema da escola era: "Tudo é número".

Os pitagóricos obtiveram muitos sucessos com suas teorias matemáticas, mas logo

³ Observação: os gregos não conheciam o zero.

seu lema mostrou-se falso. Vários resultados obtidos pelos próprios pitagóricos não puderam ser explicados por eles mesmos, pois a noção de número dos gregos era muito limitada. O episódio que vamos narrar, a seguir, tem relação com essa limitação.

Para os pitagóricos, era possível escrever a relação entre duas grandezas, por exemplo, dois comprimentos de segmentos de reta, por meio de números: 1, 2, 3, 4, 5 etc. Explicando melhor, se quisermos comparar os comprimentos de dois segmentos de reta AB e CD, podemos achar uma unidade de medida "u" conveniente, de modo que AB = xu e CD = yu, sendo x e y números naturais não nulos. Esta unidade de medida u conveniente seria encontrada por meio de técnicas de construções geométricas conhecidas na época. Caso fosse possível achar a unidade de medida comum, considerava-se que as grandezas comparadas eram "comensuráveis" (aceitavam a unidade de medida comum).

Podemos pensar (e os gregos também pensaram): será que sempre há possibilidade de achar uma unidade de medida comum? Isto é, será que dados dois segmentos de reta quaisquer, eles sempre são comensuráveis? Vejamos o caso do pentagrama pitagórico, o símbolo da escola pitagórica. É a estrela de cinco pontas, formada pelas diagonais de um pentágono regular. Essa figura era associada à paz, harmonia, saúde e felicidade.

Na figura ao lado: AB = BC = CD = DE= EA = l = lado do pentágono;

AC = CE = EB = BD = DA = d = diagonal do pentágono.

Será que é possível comparar o tamanho da diagonal e do lado do pentágono regular usando apenas os números naturais? Vamos abordar esse problema em termos atuais, com a noção de número e os recursos algébricos que temos hoje, para facilitar a resolução. Na figura a seguir, vemos o pentágono regular e suas diagonais. O problema em questão se

resume em comparar a diagonal e o lado do pentágono. Sendo d = diagonal e l = lado do pentágono, vamos calcular d/l.

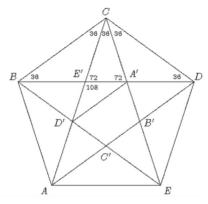


Figura 4 – O pentágono e o pentagrama de vértices A, B, C, D e E. Fonte: Paterlini (2004).

Sabemos que todos os lados do pentágono regular são iguais entre si, todos os ângulos internos são iguais e todas as suas diagonais são iguais. Então, observaremos os triângulos ΔBCD, ΔBC'D e ΔAC'E. É possível mostrar que o Δ BCD e o Δ BC'D são congruentes e, portanto, BC = CD = BC' = C'D = l. Dessa forma, calcularemos AC' e C'E, no Δ AC'E:

$$d = AD = AC' + C'D;$$

 $d = l + AC'; AC' = d - l.$

Sabemos que os triângulos ΔBCD e $\Delta AC'E$ são semelhantes (chega-se a essa informação comparando os ângulos dos triângulos do pentagrama). Assim, é possível escrevermos uma proporção entre os lados dos triângulos semelhantes:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AE}{AC'} \to \frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$$

Em seguida, resolvendo a proporção para obtermos a relação entre *d* e *l*, obteremos uma equação do 2º grau na incógnita *d*, que será resolvida com a "Fórmula de Bhaskara"⁴.

⁴ Os gregos antigos não tinham os recursos algébricos de que dispomos hoje. Eles não conheciam a Fórmula de Bhaskara. Porém ela foi usada para facilitar a compreensão do problema e o cálculo do resultado.

$$\begin{split} \frac{d}{l} &= \frac{l}{d-l} \rightarrow d \cdot (d-l) = l^2 \rightarrow d^2 - l \cdot d - l^2 = 0 \rightarrow \\ d &= \frac{-(-l) \pm \sqrt{(-l)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-l^2)}}{2 \cdot 1} \rightarrow d = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} \rightarrow \\ d &= \frac{l \pm \sqrt{5l^2}}{2} \rightarrow d = \frac{l \pm l \cdot \sqrt{5}}{2} \end{split}$$

Como d e l são medidas de comprimento, usaremos apenas a solução positiva da equação:

$$d = \frac{l \pm l \cdot \sqrt{5}}{2} \rightarrow d = l \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \rightarrow \frac{d}{l} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = 1,618 \dots$$

O resultado obtido é um número irracional, não reconhecido pelos gregos. Nesse episódio histórico, os pitagóricos descobriram que não poderiam representar a relação entre a diagonal e o lado do pentágono como grandezas comensuráveis. Elas eram incomensuráveis, isto é, grandezas que não aceitam uma unidade de medida comum.

O número 1,618.... é conhecido, hoje em dia, como Razão Áurea ou Número de Ouro ou ainda Número "fi": φ = 1,618... Trata-se de uma constante matemática que pode ser encontrada em várias figuras. Apesar da dificuldade numérica, a razão áurea era conhecida e muito usada pelos arquitetos e artistas gregos em construções e esculturas e continuou a ser usada por artistas de várias épocas. A popularidade da razão áurea entre os artistas se deve ao fato de ela retratar uma proporção muito harmoniosa e agradável esteticamente.

A razão áurea foi muito usada por Leonardo da Vinci (1452-1519), famoso artista italiano do Renascimento europeu, em seus quadros. E foi ele quem a batizou de "Razão Áurea". Na Monalisa, de 1506 – a pintura mais famosa de Leonardo da Vinci – percebe-se a razão áurea na comparação entre as medidas do rosto retratado. Essa constante matemática surge em ocorrências diversas, por exemplo: na Aritmética, temos o "problema dos coelhos", proposto por Fibonacci (século XI);

nas proporções da Catedral Notre Dame de Paris (uma construção da Idade Média); em pinturas de artistas mais recentes; em estudos estéticos da odontologia; enfim, em uma porção de casos nos quais temos figuras geométricas ou relações numéricas que trazem a sensação de equilíbrio e harmonia.

O estudo da Razão Áurea nos permite conectar a Geometria, a Aritmética e outras teorias matemáticas com a Filosofia, a Arte, a Arquitetura e a dimensão estética de muitos outros campos do conhecimento. É o estudo mais conhecido no qual podemos ver a beleza matemática.

2.3 Os sólidos de Platão e as formas da natureza

Dando continuidade à nossa conversa, as falhas da filosofia pitagórica abriram espaço para a evidência de outras escolas filosóficas que também valorizavam a Matemática. No século IV a.C., o filósofo ateniense Sócrates disseminou suas ideias, conquistando

muitos discípulos. Platão e Aristóteles foram os discípulos mais notáveis da escola socrática. As ideias de Platão foram primordiais para o desenvolvimento da Geometria, tanto que, os mais importantes matemáticos gregos, a partir de então, foram discípulos da escola platônica. É o caso de Euclides, Ptolomeu de Alexandria e de muitos outros.

Platão escreveu uma extensa obra sobre vários aspectos fundamentais da Filosofia. Seus livros eram escritos em forma de diálogos com outros filósofos. Na sua obra "Timeu", um diálogo que ele trava com este filósofo, Platão expôs suas ideias a respeito de um modelo de universo. Para Platão, a Geometria – e não a Aritmética, como os pitagóricos diziam – era a ciência que capacitava o homem a pensar de forma ordenada e lógica e a explicar o mundo.

A ideia sobre a natureza, vigente na época, era que toda a matéria orgânica ou inorgânica fosse composta, em diferentes proporções, pelos elementos naturais: fogo, ar, água e terra. Para Platão, a matéria era composta por partículas minúsculas de formatos triangulares. As diferentes composições destes triângulos geravam sólidos (figuras em três dimensões), cujos formatos básicos eram conhecidos por poliedros de Platão. Cada um dos poliedros era associado a um elemento natural. Poliedros são figuras geométricas em três dimensões, com faces planas e poligonais - por exemplo, prismas e pirâmides, são poliedros -, porém, para que o Poliedro seja "de Platão", todas as suas faces devem ser do mesmo tipo de polígono, isto é, todas triangulares, todas quadrangulares ou todas pentagonais. Nessas condições, Platão provou que são possíveis apenas cinco tipos de poliedros platônicos (figura 5):

- O tetraedro tem 4 faces triangulares;
- O hexaedro, mais conhecido por cubo
 tem 6 faces quadradas;
- O octaedro tem 8 faces triangulares;
- O dodecaedro tem 12 faces pentagonais;

O icosaedro – tem 20 faces triangulares

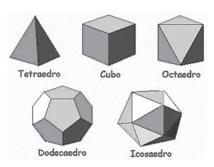


Figura 5 – Os poliedros de Platão Fonte: Eduardo (2011).

Por diversas razões filosóficas, Platão associou o fogo ao tetraedro; a terra ao hexaedro (ou cubo); o ar ao octaedro; a água ao icosaedro. A matéria, em nosso mundo, então, seria formada por diferentes quantidades e composições de minúsculos poliedros platônicos. Mais tarde, Aristóteles conjecturou que o elemento natural que compunha o céu e as estrelas era diferente de tudo o que existia em

nosso planeta. A esse misterioso elemento, os filósofos antigos deram o nome de "quintessência" ou "éter" e Aristóteles o associou ao dodecaedro.

Essa teoria pode não fazer muito sentido atualmente; no entanto, é considerada um avanço, em termos científicos, frente às teorias mais antigas, nas quais qualquer fenômeno da natureza era interpretado como um "recado" das divindades. Entre os gregos, os deuses eram fonte de explicação para quase tudo: Zeus era o deus dos raios e trovões, por exemplo. Para as civilizações antigas, a natureza era uma criação divina e se comportava de acordo com a vontade dos deuses.

Desse modo, ao oferecer uma explicação, ou melhor, um modelo para a natureza que não aludisse às vontades divinas, Platão começou a desgrudar a ciência do misticismo. Abriu portas para uma abordagem que considerasse a quantidade e o formato das substâncias naturais. A teoria platônica deu origem a uma tradição de pensamento que forjou a cultura ocidental. Influenciou sábios de todas as áreas científicas e pode ser percebida mesmo após 2.000 anos de história.

Hoje sabemos que não existe esse éter e que os elementos naturais não têm as formas platônicas. Todavia, Platão e os filósofos da época não estavam totalmente errados, pois incentivaram o desejo de saber mais sobre a natureza, usando os conhecimentos matemáticos disponíveis na época. E o episódio histórico dos poliedros de Platão mostra uma relação muito estreita entre Matemática, Ciências e Filosofia.

2.4 Do céu dos deuses mitológicos ao céu dos astrônomos

O Desenho Geométrico é um assunto muito especial, pois possibilitou o desenvolvimento de muitas teorias científicas. É uma técnica na qual usamos apenas o compasso e uma régua sem marcas de medida, mostrando a possibilidade de construir figuras traçando circunferências e retas. Nessas construções, certas regras devem ser obedecidas, como a de não usar as medidas da régua, nem as medidas de ângulos no transferidor. O fato de ser possível uma determinada construção, com régua e compasso, equivalia à demonstração de validade de uma propriedade geométrica. Essa técnica foi a preferida dos matemáticos da escola platônica.

O Desenho Geométrico oferece muitos resultados importantes; porém, desde muito cedo, os gregos sabiam que nem todas as figuras e construções eram possíveis apenas com um compasso e uma régua sem marcas. Existiam três problemas que, embora não sendo os únicos, ficaram conhecidos como "os três problemas geométricos sem solução" (eles, na verdade, têm solução, mas não com as regras citadas). Os problemas são conhecidos por:

 Trissecção do Ângulo (dividir um ângulo qualquer em três partes iguais).

- Quadratura do Círculo (dado um círculo, construir um quadrado de mesma área).
- Duplicação do Cubo ("duplicar" um cubo de aresta "a").

Vamos falar um pouco mais deste último, pois ele tem uma origem lendária curiosa e as tentativas de solução instigaram o estudo das Cônicas.

O problema da duplicação do cubo é associado a uma lenda. Conta-se que, por volta do século V a.C., uma epidemia assolou a cidade de Atenas, matando muitas pessoas, inclusive seu rei Péricles. Então, os atenienses consultaram o Oráculo do Templo de Apolo – o deus grego que representava o Sol e era o patrono da cidade – questionando o que deveriam fazer para se livrarem daquele mal. O Oráculo respondeu que o altar de Apolo deveria ser "duplicado". Como o altar de Apolo era um bloco de mármore no formato de um cubo, os gregos deveriam construir um novo altar "duplicando o cubo".

Mas, veja só, como é difícil interpretar uma vontade divina! O que você entende por "duplicar um cubo"? Dado um cubo de aresta "a" o que seria um cubo duplicado? Podemos pensar em duas possibilidades. A primeira seria construir um cubo de aresta "2a" (figura 6). Neste caso, o cubo original teria volume "a³" e o cubo "duplicado" teria volume "8a³".

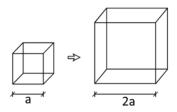


Figura 6 – Cubos de aresta "a" e "2a" Fonte: Lima (2016).

Os gregos fizeram isso, mas a epidemia continuou fazendo vítimas em Atenas. Então, eles não devem ter seguido corretamente as determinações do oráculo. A segunda possibilidade seria: dado um cubo de aresta "a",

seu volume é "a³". O cubo duplicado seria tal que seu volume seria "2.a³", isto é, o volume seria duplicado. Assim, sua aresta deveria ser (figura 7). E aí teríamos um problema: como construir o segmento de medida a partir de um segmento de medida "a"? Apolo deu um problemão aos gregos, pois este não tem solução de acordo com as regras do Desenho Geométrico. Apesar disso, os matemáticos gregos partiram para a procura de soluções; porém, utilizando outros meios.

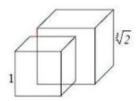


Figura 7 – O cubo duplicado seria o que tem o dobro do volume original Fonte: Wikipédia (2015).

Atribui-se a Menecmo (século IV a.C.) um importante estudo sobre curvas que

"resolveriam" o problema. Menecmo deu continuidade ao estudo das cônicas, já conhecidas dos Pitagóricos. Cônicas são curvas planas, produzidas na secção de um cone por um plano (figura 8): o círculo, a elipse, a parábola e a hipérbole. O círculo é considerado um caso particular de elipse.

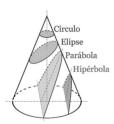


Figura 8 – Cone e as secções cônicas Fonte: Tudo é número (2010a).



Figura 9 – Uma elipse de luz Fonte: Tudo é número (2010b).

Para ilustrar, faça a seguinte experiência: acenda uma lanterna em um quarto escuro, iluminando a parede. Com a lanterna formamos um cone de luz (figura 9). Mantendo a lanterna perpendicularmente à parede, você terá um círculo de luz. Se você inclina um pouco a lanterna, terá uma elipse. Se você inclina a lanterna de modo que a borda do cone de luz seja paralela à parede, você terá uma parábola. E, finalmente, se a lanterna ficar paralela à parede, você terá uma hipérbole.

Menecmo descobriu que a intersecção de uma parábola com uma hipérbole resulta em um valor . Sua solução perdeu-se no tempo, mas, usando a linguagem algébrica atual, seria o seguinte: achar dois valores x e y (comprimentos de segmentos) que são médias proporcionais entre "a" e "2a" dados, ou seja, resolver a dupla igualdade:

Assim:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \rightarrow \begin{cases} x^2 = a \cdot y \rightarrow \text{equação de parábola} \\ x \cdot y = 2 \cdot a^2 \rightarrow \text{equação de hipérbole} \end{cases}$$

Desenvolvendo o sistema com incógnitas *x* e *y*, obtemos:

$$y = \frac{x^2}{a} \to x \cdot \frac{x^2}{a} = 2 \cdot a^2 \to x^3 = 2 \cdot a^3 \to x$$
$$x = a \cdot \sqrt[3]{2} \to y = a \cdot \sqrt[3]{4}$$

A solução que nos interessa para o problema da duplicação do cubo é o valor de $x = a \cdot \sqrt[3]{2}$.

O estudo dessas curvas foi aprofundado por outro grego, Apolônio de Pérgamo, no século II a.C. Apolônio escreveu a obra "As Cônicas", em oito volumes, considerada o estudo mais completo sobre essas curvas, na Antiguidade. Somente sete volumes – os que sobreviveram ao tempo – foram traduzidos para o árabe e, depois, para o latim. Apolônio deduziu importantes propriedades e conceitos sobre as curvas em um plano. A origem dos nomes das curvas cônicas pode ser entendida através da seguinte construção:

Em um cone, inserimos uma esfera que o tangencia em uma circunferência (figura 10).

Seja o plano α , o plano dessa circunferência. Observe que o plano α é perpendicular ao eixo VV' do cone. Cortamos o cone por um plano β , que corta o plano α , na reta r e, ao mesmo tempo, tangencia a esfera no ponto F. A intersecção de β com o cone é uma cônica (figura a seguir). Dada uma curva cônica em um plano β , definimos:

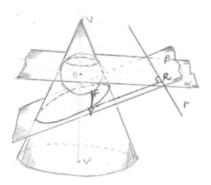


Figura 10 – O cone é seccionado pelos planos α e β Fonte: Elaborada pelos autores (2016).

Ponto P: Ponto qualquer da cônica;

Ponto F: Foco da cônica;

Reta r: Diretriz da cônica;

Ponto R: um ponto da reta r, de modo que PR seja perpendicular à reta r;

Excentricidade: é relação entre PF e PR, definida por $e = \frac{PF}{PR}$.

A excentricidade "e" é uma relação entre distâncias. Ela nunca é um valor negativo, pois estamos dividindo dois comprimentos. Apolônio constatou que:

- Se *e* < *1*, então temos uma elipse ("elipse" denota uma falta, uma omissão).
- Se e = 1, então temos uma parábola ("parábola" denota uma comparação, uma igualdade).
- Se e > 1, então temos uma hipérbole ("hipérbole" denota um excesso, um exagero).
- Se e = 0, então temos uma circunferência (nesse caso, os planos α e β deveriam ser paralelos, isto é, PR teria um comprimento infinito; logo, a divisão entre PF e PR tenderia a zero).

O estudo das cônicas foi retomado nos séculos XVII e XVIII da era cristã, por vários matemáticos e astrônomos, dentre os quais podemos citar: William Ougtred, Galileu Galilei, Johannes Kepler, Blaise Pascal, Gerard Desargues, Rene Descartes e Pierre de Fermat.

Com Galileu e Kepler, as cônicas passaram a ser objeto dos estudos dos astrônomos. Em 1604, Galileu Galilei provou que a trajetória de um projétil lançado horizontalmente do topo de uma torre, é uma parábola. Kepler observou, em 1609, que a órbita de Marte é uma elipse, lançando a conjectura de que as órbitas dos planetas não eram circulares, mas sim elípticas. De fato, Kepler estava correto, mas algumas das órbitas elípticas têm excentricidade muito pequena, o que as aproxima muito de um círculo. Quanto maior a excentricidade, mais alongada é a elipse. Veja, por exemplo, a seguinte tabela:

Tabela 1 – Excentricidade da órbita dos corpos celestes no sistema solar

Corpo celeste	Excentricidade	Corpo celeste	Excentricidade
Mercúrio	0,21	Saturno	0,06
Vênus	0,01	Urano	0,05
Terra	0,02	Netuno	0,01
Marte	0,09	Plutão	0,25
Júpiter	0,05	Cometa Halley	0,98

Fonte: Adaptada de Simmons (1987, p. 163).

Em 1686, o astrônomo inglês Edmond Halley, estudando um cometa que, de tempos em tempos, assombrava o mundo, calculou a órbita elíptica do cometa (que recebeu seu nome) e previu sua periodicidade de 76 anos, confirmando a teoria da gravitação de Newton e os resultados de Kepler.

Assim, do deus Apolo – o deus Sol – o estudo das cônicas nos levou ao céu dos astrônomos: os cientistas que estudam os astros celestes e seus movimentos. Mas, não vamos

parar por aqui. Você verá, no próximo tópico, que as cônicas servirão, inclusive, para criar Novas Geometrias e para nos levar ao espaço, em viagens espaciais!

2.5 A Geometria de Euclides e seu armário de roupas

Vamos imaginar que você é um comprador compulsivo de roupas. Você mal pode passar em uma loja e já vai comprando, comprando e comprando, cada vez mais roupas. Então, você tem uma porção de pares de meias, de camisetas, de calças etc. Uma vez tendo muito, para saber o que vestir, você tem de organizar suas roupas em um armário: calças penduradas nos cabides, camisetas dobradas na gaveta, meias enroladas com seus respectivos pares. Existem vários critérios para essa organização. Cor, tamanho, ocasião em que as peças serão usadas, são critérios a serem considerados, correto? Caso você não arrume suas roupas, você pode sofrer um

bocado ao se vestir: não achar o par da meia, querer uma camiseta que já não serve mais ou procurar, por horas, uma calça que está na lavanderia. Se você não sabe arrumar suas roupas, quem as arruma? Deixe-me adivinhar: sua mãe? Seu pai?... Enfim, possivelmente é alguém próximo de você e que, naquele momento, está sendo "uma Mãe".

Nas ciências ocorre algo muito parecido: uma vez acumulando anos e anos de resultados de pesquisas, chega uma ocasião em que é preciso organizar todas as informações por algum critério. E essa organização é extremamente importante (muito mais que a arrumação de seu armário), pois é a partir dela que demonstramos que os novos resultados científicos são verdadeiros, sabemos se as teorias são ou não consistentes, se progredimos ou não no estudo e quais benefícios determinada ciência trouxe. E quem organiza? Os cientistas (geralmente trabalhando em equipe) que conhecem profundamente o assunto organi-

zam os resultados em teorias e as teorias em ciências. Mas como nossa tradição científica é muito machista, as ciências costumam ter "um Pai" (o líder da equipe) e não "uma Mãe" (aos poucos, estamos revertendo essa situação!).

Vamos falar do Pai da Geometria: Euclides de Alexandria, matemático grego do século III a.C. que seguia o pensamento platônico. Ele não criou nenhum resultado novo na Geometria, mas organizou os resultados conhecidos em um esquema rigoroso – seguindo a lógica dedutiva, já conhecida desde Sócrates – a partir de conceitos fundamentais e de verdades consideradas evidentes.

Assim, Euclides construiu a ciência Geometria como se fosse um edifício: nos alicerces, estavam as verdades evidentes e os conceitos primitivos. Tudo o que veio a seguir era fundamentado pelo que já estava construído antes. E essa organização foi tão bem-sucedida que chamamos a Geometria de "Geometria Euclidiana". Esse matemático publicou sua obra

com o nome de "Os Elementos", contendo 13 volumes, e tratando de toda a matemática conhecida até então. Essa obra tornou-se a "bíblia" da Matemática, um modelo para outras ciências se organizarem da mesma forma, e que é publicada até hoje.

Euclides fazia suas pesquisas e lecionava na famosa Biblioteca de Alexandria. Alexandria é uma cidade no Egito, fundada pelos gregos e, portanto, considerada cidade grega. Essa biblioteca foi uma instituição de ensino e pesquisa criada no século III a.C. pelo Faraó Ptolomeu II, que contratou sábios, estudiosos e filósofos de várias partes do mundo. Assim, foi a primeira instituição na história a ter "cientistas profissionais".

A Biblioteca de Alexandria era um centro de cultura e ciência, difusor do conhecimento grego e oriental. Ao costume da época, seguia a tradição platônica; portanto, valorizava a Geometria. Não por acaso, os mais brilhantes geômetras do período antigo

trabalharam em Alexandria: Euclides de Alexandria, Ptolomeu de Alexandria, Pappus de Alexandria etc. Infelizmente, a biblioteca sofreu quatro incêndios, entre os séculos I a.C. e VI d.C., sendo definitivamente destruída neste último. Em 2002, o Egito inaugurou uma nova biblioteca, no local em que se acredita ser o mesmo da antiga, a fim de mimetizar a importância da anterior.

Nos tempos de Euclides, a Geometria já era um conjunto de muitos resultados conhecidos. Já se conheciam formas de cálculos; construções geométricas; propriedades de figuras planas e espaciais e se faziam demonstrações. Tudo muito parecido ao que fazemos hoje em dia. Mas faltava à Geometria – e por extensão, à Matemática – uma organização maior, que colocasse todos os resultados conhecidos em uma estrutura dedutiva única.

Essa organização não tinha a finalidade de resolver os problemas práticos do cotidiano. Euclides foi o primeiro a perceber que há necessidade (teórica) de organizar, de modo lógico, os resultados de uma ciência, colocando o conhecimento disponível em bases bem fundamentadas. Euclides deu à Geometria um novo *status*, o de ciência: sistematização dos conhecimentos, formalizada de acordo com a lógica dedutiva, rigorosa pelos padrões da época.

Para Euclides, o estudo das figuras geométricas deve começar por três figuras, para as quais não há uma definição formal: o ponto, a reta e o plano. É claro que você imagina como são estas figuras, mas não se trata de defini-las formalmente. Pensamos no ponto como uma "bolinha" que não tem comprimento, largura ou altura, isto é, não tem dimensão. A reta é como um fio de linha esticado e infinito, mas sem espessura, ou seja, tem somente uma dimensão – o comprimento. O plano pode ser imaginado como uma superfície lisa, sem buracos nem ondulações, e que se espalha por todas as direções até o infinito, mas não tem espessura. Assim, o

plano tem duas dimensões – a largura e o comprimento. E essas três figuras foram chamadas de "conceitos primitivos", isto é, conceitos que não têm definição.

Euclides também formulou afirmações que são evidentes, isto é, ninguém duvidaria de que são verdadeiras e para as quais é muito difícil imaginar uma situação contrária. Essas afirmações são chamadas de postulados: afirmações verdadeiras por evidência e que não exigem demonstração (prova de validade). Na teoria de Euclides, seriam necessários cinco postulados. Os quatro primeiros são, de fato, bastante óbvios:

- P1. Uma linha reta pode ser traçada ligando dois pontos quaisquer.
- P2. Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente.
- P3. Um círculo pode ser traçado com qualquer centro e com qualquer raio.
- P4. Todos os ângulos retos são iguais.

Até aqui, ninguém fez nenhuma objeção às ideias de Euclides. Porém, o 5º postulado, que ficou conhecido por "postulado das paralelas", não tinha a mesma simplicidade dos demais. Ele não é nem um pouco "óbvio" e os matemáticos da época (e dos 2.000 anos seguintes) tentaram, em vão, demonstrá-lo a partir dos quatro primeiros postulados.

P5. Se duas retas em um mesmo plano são cortadas por uma terceira reta (figura 11), e se a soma dos ângulos internos de um lado é menor que 180°, então as retas se encontrarão, se forem prolongadas suficientemente do lado em que a soma dos ângulos é menor que 180°.

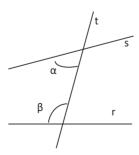


Figura 11 – Postulado das paralelas Fonte: Elaborada pelos autores (2016).

Tecnicamente, se r e s são retas do mesmo plano e são cortadas por uma reta t, são formados dois ângulos internos α e β entre elas. Se α + β < 180°, então r e s se interceptam de um lado da figura, e, portanto, as retas não são paralelas. No caso de α + β = 180°, r e s serão paralelas e se α + β > 180°, r e s interceptam-se do outro lado da figura.

Com esses cinco postulados, auxiliado pelas verdades da lógica dedutiva (que chamava de axiomas), Euclides organizou todos os resultados geométricos conhecidos, por meio de afirmações que necessitam de uma demonstração. Essas afirmações são chamadas de Teoremas e as demonstrações são argumentos lógicos e verdades já provadas da Geometria. Com isso, temos, na obra de Euclides, o Teorema de Pitágoras, o Teorema de Thales etc.

O postulado das paralelas não parecia ser uma verdade evidente (um postulado), mas sim uma verdade a ser provada (um teorema). Muitos matemáticos, após Euclides, tentaram obter uma demonstração para o "postulado das paralelas". Mas, somente no século XIX alguns matemáticos começaram a ter algum sucesso, porque mudaram sua abordagem lógica ao problema. Se você não consegue demonstrar que uma afirmação é verdadeira, pode tentar mostrar que a negação dela é falsa. Neste caso, estará usando um artifício lógico indireto, mas perfeitamente válido. Para entender como foi dado o desenvolvimento ao caso, vamos usar uma formulação mais atual, atribuída a Playfair (matemático escocês,1748-1819) para o postulado.

Afirmação: "Dada uma reta r e um ponto P fora dela, por P passa uma única reta paralela à r".

Como podemos escrever a negação dessa frase? Ora, existem dois caminhos:

Negação do tipo 1: "Dada uma reta r e um ponto P fora dela, por P passa mais de uma reta paralela à r".

Negação do tipo 2: "Dada uma reta r e um ponto P fora dela, por P <u>não passa nenhuma reta</u> paralela à r".

Os primeiros a trilharem por esses caminhos começaram da negação tipo 1. Um deles foi um jovem matemático húngaro – Janos Bolyai (1802-1860) –, que encontrou um sistema lógico consistente ao tentar substituir o 5º postulado por sua negação, isto é, concluiu que seria perfeitamente possível que a Geometria existisse com a substituição da afirmação pela negação. Consequentemente, o 5º postulado de Euclides era totalmente independente dos demais postulados, isto é, não seria possível comprová-lo a partir dos outros postulados. Em outras palavras, não era um teorema; e sim, um postulado.

Na época, o matemático mais respeitado do mundo, o alemão Friedrich Gauss (1777-1855), analisou o trabalho de Bolyai, desdenhando de sua importância, e dizendo que ele próprio já tinha alcançado esses resultados. Esse desestímulo desencorajou Bolyai a seguir em seus estudos, e ele nunca mais publicou nada. Gauss já havia, de fato, pesquisado e chegado às mesmas conclusões de Bolyai; porém, não divulgou seus resultados por medo de ser desacreditado pela comunidade de pesquisadores. Gauss repudiava o fato de ser possível uma "Geometria Não Euclidiana"! Mas por que Gauss pensava assim?

Quando você aprende Geometria na escola básica, provavelmente aprende que a natureza e os objetos que nos rodeiam têm formas geométricas: uma porta é um retângulo, o telhado de uma casa é triangular, uma lata é cilíndrica, uma caixa de papelão é um prisma, e por aí vai... De fato, a Geometria sempre foi pensada como uma representação das formas que enxergávamos – uma representação do mundo ao nosso redor; assim, sempre teve uma relação muito estreita com a nossa experiência sensorial: o que podíamos ver, tocar,

manipular, sentir pelos nossos sentidos. Lembre-se de que a Geometria começou como uma arte de agrimensores, construtores, pintores e escultores. Aos poucos, ela adquiriu uma necessidade teórica vinda da Filosofia; entretanto, ainda assim, representava um mundo de nossa experiência sensível. Mesmo com a formalização dada por Euclides, a Geometria ainda era um estudo de formas que poderiam ser vistas, desenhadas ou tocadas.

Quando os matemáticos propuseram trocar o postulado das paralelas por sua negação – seja a do tipo 1 ou do tipo 2 –, acabaram criando teorias perfeitamente coerentes do ponto de vista formal, mas que não correspondiam a nada do que pudesse ser visto ou tocado no mundo terrestre.

Gauss achava que o estudo de uma Geometria Não Euclidiana era incompatível com a realidade, uma espécie de conto de ficção, e não um estudo científico. Por isso, não divulgou seus estudos temendo expor sua reputação ao ridículo. E, além de tudo, Gauss ainda acabou com a carreira de Bolyai, que, pelo visto, era um matemático talentoso e genial. Foi uma pena para ambos, pois não levaram os créditos por ampliar o universo da Geometria.

Pouco tempo depois, no ano 1829, Nikolai Lobachevsky (1793-1856), matemático russo e reitor da Universidade de Kazan. apresentou a sua teoria no artigo "Os princípios da Geometria". Nessa obra, ele fez exatamente o que dissemos acima: substituiu o postulado das paralelas pela sua negação (do tipo 1), e encontrou uma teoria coerente e correta para a Geometria. Mais do que isso, Lobachevsky propôs um modelo para essa nova Geometria, que ficou conhecido por Geometria Hiperbólica. Nesse modelo, o "plano" é uma superfície hiperboloide – é o formato aproximado de uma corneta. As "retas" são hipérboles desenhadas nessa superfície, e os "pontos" são como os da Geometria Euclidiana.

Se chamarmos de paralelas as "retas" do mesmo "plano" que não se encontram, veremos que, sim, é possível que "por um ponto P passem infinitas retas paralelas à reta r". A obra de Lobachevsky abriu as portas para a criatividade dos matemáticos. Vieram novos estudos, sobre essa Geometria Hiperbólica e outros modelos possíveis.

Bernhard Riemann (1826-1866), matemático alemão, propôs a negação do tipo 2 para o postulado das paralelas; então, novamente, obteve uma teoria consistente, coerente e correta. O modelo usado por Riemann é muito fácil de imaginarmos. Sua teoria foi chamada de Geometria Elíptica. Nela, o "plano" é a superfície de uma esfera ou de um elipsoide – a forma da bola de futebol americano – e as "retas" são as circunferências (ou elipses) sobre esta superfície, cujo centro coincide com o centro da esfera (ou do elipsoide). O "ponto" é o mesmo dos modelos anteriores.

Imagine o planeta terra como a superfície em questão. As "retas" seriam como as linhas do equador ou os meridianos (circunferências cujos centros coincidem com o centro da esfera), e pontos são pontos quaisquer na superfície. Agora, imagine que marcamos uma reta e um ponto P na superfície da Terra. Qualquer outra "reta" que passe por P vai, inevitavelmente, cortar a linha anterior. Assim, não existem retas paralelas na Geometria Elíptica.

Dada a reta r e um ponto P fora dela, vemos, na figura a seguir (figura 12), as retas paralelas nos três modelos de Geometria: na Geometria Euclidiana só há uma paralela. Na Geometria de Lobachevsky temos mais de uma. Na Geometria de Riemann não há paralelas.

Atualmente, conhecemos vários modelos de Geometrias. As teorias mais modernas da Física tornaram-se possíveis considerando o espaço físico modelado pelas Geometrias Não Euclidianas. As viagens espaciais, com foguetes e satélites, foram viabilizadas a partir dessa concepção de espaço.

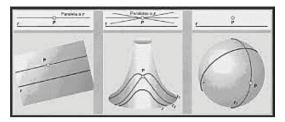


Figura 12 – Modelos das Geometrias Euclidiana, Hiperbólica e Elíptica, respectivamente. Fonte: Euclides, o pai da geometria (2008).

Voltando a falar da organização da Geometria, com tantos novos resultados, a ideia de que Geometria era a ciência das formas ou o estudo da natureza passou a ser obsoleta. Mostrou-se necessária uma nova organização, que desse à Geometria Euclidiana uma formatação mais precisa, rigorosa e formal. Foi David Hilbert (1862-1943), matemático alemão, quem fez essa proposta. Pode-se considerar que ele foi um "segundo Euclides", dando mais rigor à Geometria Euclidiana, em sua obra "Fundamentos da Geometria", de 1899. Em vez de cinco postulados, Hilbert

reescreveu a Geometria a partir de 20 postulados. E essa é a formulação usada no ensino básico e superior atualmente.

Mas, você pensa que esse é o fim da história? Não... Ainda há muito para ver! Além da Geometria Euclidiana e das Geometrias Não Euclidianas já citadas, temos a Geometria Fractal e outros modelos menos conhecidos. Os fractais trazem novidades interessantes quanto aos conceitos geométricos e subvertem nosso senso comum.

Os fractais são figuras produzidas por um processo recursivo – uma repetição contínua de um desenho ou procedimento, em várias escalas. Podem ser produzidos por programas de computadores. Na Geometria Fractal, obtemos figuras muito mais parecidas às que encontramos na natureza – nuvens, plantas, vasos sanguíneos etc. – do que é possível com a Geometria Euclidiana.

Veja um exemplo: a figura a seguir (figura 13) representa a construção do fractal "curva de Koch". A primeira linha é um mero segmento de reta. Para obter a segunda linha, apagamos a parte central do segmento e a substituímos por um "V" - formado por dois segmentos inclinados a 60° entre si -; logo, temos, nesta, uma linha composta por quatro segmentos de reta de mesma medida. Na terceira linha, em cada uma dessas quatro partes, repete-se o processo anterior. E assim sucessivamente. Na sexta linha, já temos uma forma bem diferente do segmento inicial. Esse é o processo da Curva de Koch. Podemos fazer essa interação quantas vezes quisermos, pois esse processo é infinito. O que chamamos de Curva de Koch não é exatamente a sexta linha, mas o que seria "a última" das interações. Na verdade, o que importa aqui é o processo e não o produto.

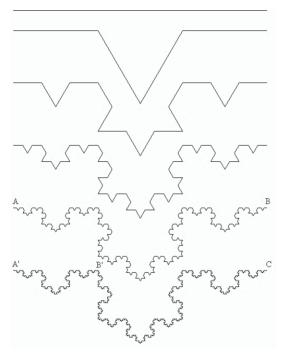


Figura 13 – Curva de Koch Fonte: Wikipédia (2016).

Os fractais têm a importante propriedade de se repetirem em escalas diferentes.

Repare na figura anterior (figura 13): o pedaço marcado por A'B' na sexta curva corresponde ao pedaço marcado por AB na quinta, porém, em outra escala de tamanho. Um resultado incrível na Geometria Fractal é o cálculo da dimensão de uma figura. Enquanto na Geometria Euclidiana temos figuras de dimensão 0 (o ponto), 1 (a reta), 2 (o plano) ou 3 (o espaço), na Geometria Fractal as figuras podem ter dimensão fracionária. A Curva de Koch, por exemplo, tem dimensão 1,26. Mas não vamos entrar em detalhes aqui sobre esse cálculo. Ficará para uma próxima oportunidade.

O polonês Benoit Mandelbrot (1924-2010) é considerado o criador da Geometria Fractal. Entre as décadas de 1950 e de 1970, Mandelbrot trabalhava em uma importante empresa do ramo da informática e tinha acesso a vários recursos da computação gráfica. Estudando problemas de ruídos nas linhas telefônicas que a empresa usava para transmissão de dados, descobriu um padrão nos

períodos em que esses ruídos se manifestavam. Esse padrão pode ser representado por uma figura chamada Poeira de Cantor, um fractal simples. Assim, um problema de computação motivou o estudo de algo até então desconhecido – novos conceitos, cálculos, propriedades –, originando uma nova teoria.

Sempre será preciso um novo "Euclides" para organizar a Geometria dentro de novas perspectivas. Esse trabalho de revisão de teorias, correção dos erros cometidos, generalização dos resultados é um trabalho constante dos matemáticos. Além disso, a perspectiva histórica nos mostra o importante papel da formalização na Geometria.

Mas, por curiosidade, você já organizou, seu armário de roupas neste ano?

2.6 Para finalizar nossa conversa...

...Embora não tenhamos esgotado o assunto, mostramos aqui como a Geometria se desenvolveu a partir de problemas. Pensar nas formas de solução para os problemas práticos propiciou o acúmulo de conhecimentos, gerando novos problemas, de caráter teórico: o de formulação de conceitos precisos, a generalização nos cálculos e a necessidade de comprovar que os resultados encontrados são, realmente, verdadeiros. Alguns séculos mais tarde, a reunião de todos os resultados conhecidos precisou ser organizada – criando mais um problema – e essa organização foi realizada de acordo com a lógica dedutiva. Finalmente, a própria organização gerou novos problemas que possibilitaram novas Geometrias.

Tentamos mostrar, também, que esses problemas têm origens diversas: o cotidiano das pessoas, desafios ou enigmas, questões filosóficas, questões de outras ciências (como a Física ou a Informática) ou da própria Geometria. Muitos desses problemas são antigos, outros são bem modernos, alguns são altamente necessários, outros são considerados

passatempo. Muitos problemas exigem formas de pensar originais, novas abordagens, quebra de paradigmas ou muita criatividade; outros, exigem apenas a dedicação de pessoas conhecedoras dos resultados já estabelecidos.

O que impulsiona o progresso, tanto da Geometria, quanto das outras ciências, é o espírito investigativo dos pesquisadores: a capacidade de enfrentarem os problemas, por meios racionais, embasados no conhecimento existente. Quando resolvemos problemas, estamos sempre sujeitos a errar, voltar ao ponto inicial e tentar novamente. Sem dúvida, a ciência se desenvolve em acertos e erros. E o caminho do desenvolvimento nunca chega ao fim! Sempre é possível que novas pesquisas apontem erros passados, limitações dos resultados já tidos como verdades científicas, e que provoquem reformulações nas teorias já estabelecidas. Isso acontece em todas as ciências - elas sempre estão sujeitas à crítica e à revisão. O mesmo ocorre com a Geometria. Portanto, para se tornar um geômetra, o importante é nunca desistir!

Referências

BORTOLOSSI, Humberto José. *Os Sólidos Platônicos*. 28 maio 2009. Disponível em: http://www.uff.br/cdme/platonicos/ platonicos-html/solidos-platonicos-br.html>. Acesso em: 15 jan. 2016.

BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

CIÊNCIA DE GARAGEM. *Os Sólidos de Platão versus o atomismo de Demócrito*. 2015. Disponível em: http://cienciadegaragem.blogspot.com. br/2015/09/os-solidos-de-platao-versus-o-atomismo.html>. Acesso em: 15 jan. 2016.

EDUARDO, João. *A Porta Mágica da História da Matemática*. 2011. Disponível em: http://superhistorimat.blogspot.com.br/2011/04/solidos-platonicos-trabalho-do-joao-n16.html>. Acesso em: 15 jan. 2016.

EUCLIDES, O PAI DA GEOMETRIA. *Geometrias Não Euclidianas*. 25 set. 2008. Disponível em:

http://beafemika.blogspot.com.br/2008/09/ euclides-geometrias-no-euclidianas.html>. Acesso em: 15 jan. 2016.

EVES, Howard (Org.). *Tópicos da História da Matemática para Uso em Sala de Aula*: Geometria. São Paulo: Editora Atual, 1992. (Coleção NCTM)

HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da Matemática*. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1952.

LIMA, João Paulo. A origem das Secções cônicas. s/d. *Ambiente Dinâmico de Ensino das Seções Cônicas (ADESC)*. Disponível em: http://www.adesc.blog.br/crbst_2.html#anchor-1. Acesso em: 15 jan. 2016.

PATERLINI, Roberto Ribeiro. Pentágono, Incomensurabilidade e o Método da Exaustão. 11 mar. 2004. *Hipertexto Pitágoras*. Disponível em: http://www.dm.ufscar.br/hp/hp527/hp527001/hp5270018/hp5270018.html . Acesso em: 15 jan. 2016.

PEREIRA, J. *Tales de Mileto, a Pirâmide e o Teorema.* 22 ago. 2011. Disponível em: http://matematicaferafacitec.blogspot.com.br/2011/08/tales-de-mileto-piramide-e-o-teorema.html>. Acesso em: 15 jan. 2016

POMPÉIA, Luciana. *Cosmologia de Platão*. Revista Filosofia. s/d. Disponível em: http://filosofia/ideologia-sabedoria/36/artigo257141-5.asp>. Acesso em: 15 jan. 2016.

SIMMONS, George. Cálculo com Geometria Analítica. São Paulo: Mac Graw-Hill, 1987. v. 2.

SIQUEIRA, Rhauni. *De Frente Com a Matemática*. 2012a. http://defrentecomamatematica.blogspot.com.br/p/blog-page.html>. Acesso em: 15 jan. 2016.

TUDO É NÚMERO. *Cone de luz.* 2010a. Disponível em http://tudoenumerofafopai.blogspot.com.br/2010/12/as-aplicabilidades-das-curvas-conicas.html. > Acesso em: 15 jan. 2016.

_____. Secções cônicas. 2010b. Disponível em http://tudoenumerofafopai.blogspot.com.br/ 2010/12/as-aplicabilidades-das-curvas-conicas. html >. Acesso em: 15 jan. 2016.

WIKIPÉDIA. *Curva de Koch*. Disponível em https://pt.wikipedia.org/wiki/Curva_de_Koch. Acesso em: 15 jan. 2016.

_____. *Duplicação do cubo*. 2015. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/ Duplica%C3%A7%C3%A3o_do_cubo>. Acesso em: 15 jan. 2016.

Os cientistas sempre concordam? Um "debate" no cenário do ensino de Física Moderna

MARIA INÊS RIBAS RODRIGUES¹
NATÁLIA PIMENTA²

A vida do adolescente de hoje é bem diferente do que era a de alguém que passou essa fase da vida há três ou quatro décadas. Imagine que, na época, para se realizar uma ligação telefônica entre São Paulo e Belo Horizonte seria preciso aguardar até 2 horas,

¹ Professora Doutora do Programa de Pós-graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática da UFABC.

² Mestranda do Programa de Pós-graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática da UFABC.

sendo que esse tempo seria para aguardar que a telefonista "conseguisse linha". Os equipamentos eletrônicos eram enormes em relação aos dos nossos dias. Ocorreu a diminuição, por exemplo, da profundidade de aparelhos de televisão, mostrando que a inovação científica e tecnológica dos semicondutores desenvolveu-se minimizando o tamanho dos equipamentos. Também são exemplos os celulares, computadores, *tablets* etc.

O desenvolvimento tecnológico, apesar de trazer uma série de consequências preocupantes, trouxe melhorias e avanços para a civilização. Vivemos hoje em um mundo repleto de máquinas e aparelhos "inteligentes" e capazes de perceber variações no ambiente e também reagir a elas. Os equipamentos de diagnósticos médicos possibilitam, cada vez mais, ampliar a visualização do interior de órgãos e do corpo humano. Por sua vez, o desenvolvimento da tecnologia da comunicação aproximou as pessoas e possibilitou que as

informações circulassem com maior velocidade a cada dia.

Talvez você ainda não tenha percebido, mas todos esses avanços estão relacionados, principalmente às pesquisas na área da Física. Pesquisadores, tanto de Física teórica quanto de Física aplicada, têm empreendido suas investigações sobre os átomos e as partículas elementares. Como consequência, são fabricados computadores cada vez mais velozes e mais compactos, possibilitando uma novidade à cada dia.

Mas onde isso irá parar? Quais são os limites?

Para tratar desse assunto temos que nos aproximarmos da Física. Assim, este capítulo traz uma discussão interessante acerca da Física Moderna, trazendo aspectos do seu início, como Ciência, e das discussões que envolveram os cientistas com diferentes pontos de vista e opiniões.

A ciência passou por uma enorme revolução no ano de 1900, quando teve início a Física Moderna, mais precisamente o início da Física Quântica. Assim, conhecer os contextos socioeconômicos, a cultura e os diferentes "atores" que estiveram envolvidos nesse processo costuma ser o motivo do interesse, não somente de alunos, como também do público leigo pela Ciência.

Dessa forma, apresentaremos alguns aspectos desse conhecimento, principalmente os que se referem ao importante debate entre dois cientistas da época: Albert Einstein e Niels Henrik David Bohr.

3.1 Aspectos históricos e teóricos

O período da história da ciência que trataremos neste capítulo é o final do século XIX e início do XX. Nesse período, a Alemanha estava empenhada em fabricar aço de ótima qualidade, o que necessitava de um rigorosíssimo controle de temperatura nos altos fornos abastecidos por carvão. Mas como era possível controlar essa temperatura?

Evidentemente, utilizar termômetros tradicionais era inviável, pois as temperaturas envolvidas nesse processo de produção são elevadíssimas; porém, naquela época, já se conhecia que a cada uma das cores do espectro da luz do Sol estava relacionada a uma temperatura.

Foi William Herschel, por volta de 1800, quem realizou o seguinte experimento: a luz do Sol, ao passar por um prisma, é difratada em diferentes cores que a compõem. Você se recorda de quais são? Pois bem, as diferentes cores vão desde o vermelho até o azul. E este cientista havia identificado que cada uma das cores estava relacionada a uma temperatura, sendo no azul a temperatura mais alta e no vermelho a mais baixa. Também constatou que, ao lado da cor vermelha, quando já não havia mais uma luz visível, o termômetro ainda apontava uma elevação de temperatura.

Herschel identificou que, nessa região do espectro, deveria haver alguma radiação não visível causando a elevação da temperatura indicada no termômetro, ao que ele chamou de "raios caloríficos", o que atualmente conhecemos como radiação infravermelha. E foi por meio desse conhecimento que se pôde controlar e identificar as temperaturas dos altos fornos. O metal, ao ser aquecido, iria alterando sua cor, desde o vermelho até o azul e, com isso, emitindo radiação térmica em cada um dos diferentes comprimentos de onda. O que parecia ser algo simples e trivial foi um motivador para novos acontecimentos na área da Física e gerou, entre os muitos dos cientistas da época, uma enorme discussão.

É interessante notar que a discussão faz parte da produção de conhecimento na ciência e aponta que o conhecimento é um processo que deve considerar, ainda, os contextos sociais e econômicos vivenciados na época.

Lord Kelvin havia previsto que dois pontos ainda precisavam ser discutidos, ressaltando-os como duas "nuvens" no céu da Física Clássica. Um deles envolveria a comprovação da inexistência do Éter, que estaria relacionado à Teoria da Relatividade; o outro estava relacionado a este problema e envolveria a Termodinâmica Clássica, vivenciada ao final do século XIX.

Voltando ao problema da radiação, as medições correspondentes ao aquecimento e à fundição dos metais nas indústrias siderúrgicas trouxeram dados experimentais que não corresponderiam às equações matemáticas envolvendo a Termodinâmica Clássica. E esse, com certeza, seria um obstáculo a superar e estava relacionado a uma das "nuvens" enumeradas por Lord Kelvin.

Para fazermos uma ideia, esse episódio da História da Ciência fora nomeado como "catástrofe do Ultravioleta", já que, durante o aquecimento, os corpos emitiriam uma radiação ultravioleta tão intensa que devastaria tudo ao redor. Nesse sentido, o corpo humano com a temperatura de 37 graus Celsius, brilharia no escuro! Mas bem sabemos que isso não acontece no dia a dia. Então, o que estaria errado?

A resposta a essa questão surgiu com o matemático e físico alemão Max Karl Ernst Planck (1858-1947), pronunciada em uma palestra perante a Sociedade de Física de Berlim, em 14 de dezembro de 1900. Decididamente, esse cientista escreveu seu nome nos Anais da história moderna!

Basicamente, Planck afirmou que a radiação é absorvida ou emitida por um corpo aquecido, não sob a forma de ondas, mas por meio de pequenos pacotes de energia. E esse resultado surgira após seis anos de busca em torno de uma equação matemática, que descreveria corretamente o comportamento da radiação de corpo metálico aquecido até elevadas temperaturas, quando estaria

incandescente, ou seja, emitindo luz (onda eletromagnética). A esses pequenos pacotes de energia, Planck chamou de "quantum" (cujo plural é quanta), uma palavra de origem latina, que significa quantidade. Essa palavra dá a ideia de uma unidade mínima, indivisível, pois o quantum seria uma unidade definida de energia proporcional à frequência de radiação, como veremos mais à frente.



Figura 1 – Max Planck Fonte: http://famousscientist.net/max-planck

Planck era um professor de Termodinâmica com formação clássica, e talvez por isso tenha sido difícil para ele admitir que a luz eletromagnética, tida como uma onda, viesse a se comportar daquela maneira. Planck sentiu o quanto essa ideia seria revolucionária ao levar seu filho para um passeio, nesse dia, quando teria dito: "tive uma ideia tão significativa quanto aquelas do Newton".

A Teoria Quântica da Radiação de Planck foi publicada, pela primeira vez, em 1900; portanto, antes da Teoria da Relatividade Especial de Einstein, de 1905. Foi um período efervescente no mundo da Física, que envolveu outros cientistas, tais como Ernest Rutherford, Niels Henrik David Bohr e Werner Karl Heisenberg, que levantaram questões e sugeriram propostas para os próximos capítulos dessa história.

Sob uma perspectiva histórica, cabe lembrarmos de que a Física anterior à Teoria Quântica é chamada de Física Clássica; a posterior, de Física Moderna.

Nessa época, após a publicação do seu artigo que propunha a Teoria da Relatividade Especial, Einstein recebera uma única carta por meio da qual seu remetente solicitava majores detalhes sobre a matemática empreendida, além de maiores explicações sobre o seu trabalho. Ela vinha da Universidade de Berlim, emitida pelo professor Planck; sendo assim, este foi o primeiro membro da academia a reconhecer a importância das originais teorias de Einstein. Não é preciso mencionar o quanto Einstein ficara encantado, já que Planck havia se tornado, há apenas alguns anos antes, um dos Físicos mais renomados do mundo pela sua proposta dos quanta.

A ideia do *quantum* consiste em considerar a energia, não como uma variável contínua, mas como uma variável quantizada em múltiplos inteiros do *quantum* de ação, e este, por sua vez, é uma função adequada de frequência:

 $En=n\Delta E$

 $\Delta E = hf$

Onde E é a energia, n é um número inteiro, ΔE é a variação da energia, h é a constante de Planck e f é a frequência.

Einstein, em seus trabalhos sobre o Efeito Fotoelétrico, mostrou como outro fenômeno físico dependia desse *quantum* de ação. E logo ficou claro que qualquer processo de radiação dependia do *quantum*; afinal, não havia como empreender uma análise casual dos fenômenos de radiação, apenas era possível estimar as probabilidades de ocorrência de seus processos individuais.

Nesse ponto, vale ressaltarmos a primeira controvérsia evidenciada pelo desenvolvimento da Mecânica Quântica: os parâmetros utilizados para definir o *quantum* de ação (frequência e comprimento de onda) apenas podem ser definidos através da noção de interferência, um fenômeno ondulatório que tem uma característica essencialmente contínua.

Então, para que esse aparente paradoxo se torne ainda mais instigante, podemos citar a

contribuição de De Broglie, ao postular que não somente a radiação apresenta um caráter duplo (de onda e de partícula) mas também as partículas materiais apresentam essa característica.

Se a radiação eletromagnética ora se comporta como "onda", ora como "partícula", por que uma "partícula" (por exemplo, elétron) não pode se comportar como uma "onda"?

A teoria de De Broglie foi confirmada por meio de experimentos com difração de elétrons: Davisson e Germer utilizaram um cristal de níquel para difratar um feixe de elétrons. E esse cristal foi escolhido por que o espaçamento atômico tem ordem de grandeza próxima ao do comprimento de onda do feixe de elétron – condição para que o fenômeno de difração ocorra.

Bohr, ao aplicar a ideia do *quantum* de Planck à noção de átomo, conseguiu dar uma explicação satisfatória para o fenômeno da estabilidade do núcleo atômico, que intrigava os cientistas da época.

Bohr explicou que, quando consideramos as transições de energia entre dois estados quânticos estacionários, elas eram acompanhadas pela emissão ou absorção de um *quantum* de luz monocromática.

Para entender a noção de estados estacionários, analisaremos os postulados de Bohr:

- O elétron pode se mover em determinadas órbitas sem irradiar. Essas órbitas estáveis são denominadas estados estacionários.
- 2. As órbitas estacionárias são aquelas nas quais o momento angular do elétron em torno do núcleo é igual a um múltiplo inteiro de $h/2\pi$.
- O elétron irradia quando salta de um estado estacionário para outro mais interno, sendo a energia irradiada dada por:

$$E = hf = Ei-Ef$$

Onde Ei e Ef são energias dos estados inicial e final.

Em contrapartida, Schrödinger mostrou que os estados estacionários podiam ser explicados por uma equação de onda, hoje chamada de equação de Schrödinger.

A função de onda determina completamente o estado físico do sistema. Isso significa que, dada a função de onda Ψ de um sistema no instante t, não somente todas as propriedades do sistema naquele instante estão descritas como também as propriedades em qualquer instante subsequente. Assim, chegamos a uma questão de interesse ao debate entre Bohr e Einstein sobre os problemas epistemológicos na física atômica: o fato de o tratamento quântico da radiação não estabelecer nenhuma ligação mais estreita com os fenômenos ondulatórios e ainda sobre como coordenar experiências aparentemente contrastantes sem abandonar a continuidade e a causalidade

Antes de discutirmos acerca dos argumentos de Bohr e das objeções de Einstein, é necessário entendermos mais uma questão de suma importância para a Mecânica Quântica: O Princípio de Indeterminação de Heisenberg.

Segundo o Princípio de Indeterminação, não se pode conhecer com precisão absoluta a posição ou a velocidade de uma partícula, porque, para medir qualquer um desses valores, iremos alterá-los. E essa não é uma questão de medição, mas sim da própria natureza quântica das partículas.

Logo, o caráter abstrato dessa teoria exigiu um exame da questão da observação na Física. Temos, então, mais uma questão de interesse para este debate: o problema do observador ou a interação incontrolável dos objetos e instrumentos de medida.

3.2 O debate entre Einstein e Bohr

Na ocasião do Quinto Congresso de Solvay, que ocorreu no Instituto de Solvay, em

Bruxelas/Bélgica, de 24 a 29 de outubro de 1927, Albert Einstein já manifestava sua insatisfação em relação à aceitação da Interpretação de Copenhague³, proposta inicialmente por Niels Bohr e Werner Heisenberg.

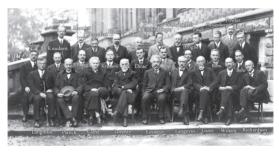


Figura 2 – Participantes do Congresso de Solvay Fonte: https://esquadraodoconhecimento.wordpress. com/2012/09/09/conferencia-de-solvay/

³ Ao longo do último século, pesquisadores desenvolveram diversas interpretações para o significado da Mecânica Quântica. A mais conhecida é a Interpretação de Copenhague, de autoria de Niels Bohr, Max Born, Wolfgang Pauli e Werner Heisenberg. Segundo essa interpretação, uma partícula está indeterminada, como onda, até que o ato de observar a force a assumir o comportamento de partícula.

Apesar de as "atas do Congresso de Solvay" não terem registrado as ricas discussões informais que, conforme depoimento de Otto Stern, "[...] começavam no café da manhã, no hotel, com Einstein expondo suas objeções aos argumentos de Bohr; e tinham um segundo tempo no jantar, quando Bohr comunicava sua resposta", as posições antagônicas de Einstein e Bohr – protagonistas de um debate que se estendeu por vários anos – alimentaram acaloradas discussões, reflexões e publicações sobre os fundamentos da Teoria Quântica e o(s) significado(s) do conhecimento na Física.

Para Bohr, a questão da relação entre o tratamento quântico e os fenômenos ondulatórios, bem como coordenar experiências contrastantes, além da questão da interação observador-objetos-instrumentos, pode ser resolvida utilizando-se a noção de complementaridade: somente a totalidade dos fenômenos pode esgotar as informações possíveis sobre os objetos.

Segundo este princípio de superposição geral da descrição ondulatória e da característica de individualidade dos processos atômicos elementares, por mais que os fenômenos transcendam o âmbito da explicação da Física Clássica, a descrição de todos os dados deve ser expressa em termos clássicos, o que evidencia a relação de interdependência entre o que se conhece (a Física Clássica e seus instrumentos de medida) e a própria condição que estes instrumentos propiciam para que se estude o fenômeno.

Dessa forma, um experimento se refere a uma situação em que podemos dizer aos outros o que fizemos e o que aprendemos, mas somente podemos nos comunicar em uma linguagem que dominamos. Sendo a Física Clássica a linguagem que conhecemos, a descrição de todos os dados deve ser expressa em termos clássicos.

Nesses experimentos, os instrumentos de medida servem para definir as condições

em que os fenômenos aparecem e qualquer tentativa de subdividir os fenômenos requer uma mudança do arranjo experimental. Assim, é impossível fazer qualquer separação entre os comportamentos dos objetos atômicos e sua interação com os instrumentos de medida.

Outra questão é que dados obtidos em diferentes condições experimentais não podem ser compreendidos dentro de uma explicação única, e a totalidade do efeito apenas pode ser explicada mediante a apresentação dos resultados dos dois experimentos distintos.

Para Bohr, os paradoxos são eliminados por um exame das condições experimentais em que os fenômenos aparecem. Já Einstein, segundo sua visão, aponta o paradoxo e ponto de conflito que advém desta argumentação: estes experimentos complementares são também mutuamente excludentes.

Para entendermos melhor o ponto de vista de Einstein, vamos imaginar a seguinte situação hipotética: ao observarmos a lua no céu noturno, sabemos que, para todo instante, a lua se encontra em uma posição bem determinada no céu. Mas, será que podemos afirmar que a lua está lá, independentemente de alguém ou de algum aparelho registrar sua presença?

No contexto da Física Clássica, a resposta é "sim", pois a posição de um objeto qualquer pode, pelo menos em teoria, ser determinada por meio de uma equação, de modo que, ao conhecermos a solução dessa equação, é possível determinarmos a posição do objeto em qualquer instante.

Existe, portanto, um conceito físico (referente à posição do objeto) pertencente à teoria física a partir da qual se pretende descrever a realidade. Você diria, então, que a lua está lá mesmo que ninguém a estivesse observando?

Entretanto, no âmbito da Teoria Quântica o cenário é diferente! Considerando que os objetos tratados pela Teoria Quântica

pertencem ao mundo microscópico (átomos e objetos menores do que o átomo), as interações entre esses e os aparatos experimentais utilizados para detectá-los não podem ser desprezadas, ou seja, o fato de observar ou não o objeto altera significativamente o seu comportamento.

Assim, se voltarmos à questão anterior, agora no contexto da Física Quântica, o que você diria? Um objeto está lá, independentemente de ser observado?

Saiba que foram questões dessa natureza que motivaram os referidos debates entre Einstein e Bohr no início da década de 1930, ocasião na qual as bases da Teoria Quântica estavam sendo fundamentadas.

Para ilustrar as posições antagônicas entre Bohr e Einstein, podemos pensar que se transportadas suas posições para o mundo macroscópico, a resposta de Einstein à pergunta sobre a existência da lua, independentemente de um observador, seria "sim, ela está

lá!". Já Bohr diria "não faz sentido perguntar se a lua está lá se não há possibilidade de observá-la". E você? Qual é a sua resposta para essa questão?

Referências

ALVES, Rubem. *Filosofia da ciência*: introdução ao jogo e suas regras. São Paulo: Editora Brasiliense, 1985.

BETZ, Michel Emile Marcel. Elementos de mecânica quântica da partícula na interpretação da onda piloto. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Porto Alegre, v. 36, n. 4, p. 1-14, out. 2014. Disponível em: http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/364310.pdf>. Acesso em: 17 abr. 2015.

_____. *Radiação térmica* – Teoria de Planck. [s. d.]. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/~betz/iq_XX_A/radTerm/aRadTermText.htm. Acesso em: 17 abr. 2015.

BOHR, Niels. *Física atômica e conhecimento humano*: Ensaios 1932-1957. 2. ed. Copenhage: Contraponto, 1958. 140 p.

EINSTEIN, Albert; PODOLSKY, Boris; ROSEN, Nathen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, v. 47, n. 10, p. 777-780, 1935.

HAINZENREDER, Greice de Oliveira; SALGADO, Tânia Denise Miskinis. *Evolução dos Modelos Atômicos*: Modelo Atômico de Bohr. Disponível em: http://www.iq.ufrgs.br/ead/fisicoquimica/modelosatomicos/modelo_bohr. httml>. Acesso em: 17 abr. 2015.

LIMA, Sandro Marcio. *Difração de elétrons*. Disponível em: http://fisica.uems.br/arquivos/labmoderna/difrata_e.pdf>. Acesso em: 17 abr. 2015.

ROCHA, José Fernando Moura (Org.); PONCZEC, Roberto I. L.; PINHO, Suani T. R.; ANDRADE, Roberto F. S.; FREIRE-JUNIOR, Olival; RIBEIRO FILHO, Aurino. *Origens e evolução das ideias da física*. Salvador: EDUFBA, Salvador, 2002.

SALMERON, Roberto A. A energia e a equação de Schrödinger. 2007. *E-física*. Disponível em: http://efisica.if.usp.br/moderna/mq/schrodinger/>. Acesso em: 17 abr. 2015.

SANTOS, Bernardo Rodrigues; ALVES, Rafael dos Santos; DUARTE, Otto Carlos Muniz Bandeira.

4.1.2 Princípio da Incerteza de Heisenberg. 2007. *Criptografia Quântica*. Disponível em: http://www.gta.ufrj.br/grad/07_1/quantica/PrincpiodaIncertezadeHeisenberg.html>. Acesso em: 17 abr. 2015.

SANTOS, Carlos Alberto dos. *Fundamentos do Modelo Atômico de Bohr*. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/tex/fis142/modelobohr/modelodebohrconc.html>. Acesso em: 17 abr. 2015.

SILVA NETO, Jader da; OSTERMANN, Fernanda; PRADO, Sandra Denise. *Postulado de Louis Victor de Broglie*. Disponível em: http://lief.if.ufrgs.br/~jader/deBroglie.pdf>. Acesso em: 17 abr. 2015.

Até onde vão os números? Por que eles existem?

Francisco José Brabo Bezerra Liliana Quintero Lopez¹ Lídia de Souza da Cruz² Marcos Antonio Ruano³

4.1 Para começo de conversa...

Existe um "pré-conceito" cultural em relação à Matemática, pois muitos dizem que não gostam dela e consideram difícil aprendê-la. É preciso derrubar aquele velho mito

¹ Aluna do Mestrado do Programa de Pós-graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática.

² Aluna do Mestrado do Programa de Pós-graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática.

³ Aluno do Mestrado do Programa de Pós-graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática.

de que aprender Matemática é difícil e apenas privilégio de poucos. Grandes nomes que se destacaram em momentos diferentes na ciência também não tinham uma boa relação com a escola ou com a Matemática, mas se superaram e produziram resultados surpreendentes para a humanidade. Entre eles, podemos destacar Albert Einstein, Charles Darwin, Thomas Edison e Nikola Tesla.



Figura 1Fonte: http://themico.deviantart.com/art/Pinky-and-the-brain-28128271

O escritor Malba Tahan (Júlio César de Melo e Sousa) também teve dificuldades com essa disciplina, mas conseguiu superá-las. Ele foi a primeira pessoa no Brasil a tentar descomplicar a Matemática. Como professor, usou a criatividade a fim de ensinar de forma diferente e divertida.

Sua imaginação era ilimitada, o que se manifestava tanto em seus romances e contos, quanto na área da educação.

Em seu livro mais conhecido, "O homem que calculava", Malba Tahan apresenta, por meio das proezas de um personagem persa que se devota aos cálculos matemáticos, uma infinidade de questões e desafios matemáticos, seguindo o estilo das narrativas de "Mile uma noites". Monteiro Lobato foi um dos grandes escritores que se apaixonou por este livro, profetizando a imortalidade de Tahan na história da literatura.

É comum a literatura educacional relatar que estudantes nomeados com "dificuldade"

são posicionados como o "outro" da sala de aula, o sujeito que precisa "estudar mais", "ter mais concentração" e fazer os exercícios "corretamente". Essa valorização dos algoritmos pelos professores que ensinam Matemática cria, muitas vezes, dificuldades de compreensão no aprendizado dos alunos que não conseguem reproduzir mecanicamente esses passos.

Tal reprodução é, ao nosso ver, produto do aprendizado recebido de quando eram estudantes da Educação Básica.

Observamos, contudo, que muitos estudantes com dificuldades na escola envolvem-se com "outras matemáticas", quando estão jogando videogame, auxiliando os familiares nas lavouras, vendendo e comprando objetos etc. É provável, então, que esses outros modos de raciocinar sejam considerados menos elevados frente aos problemas "da realidade" presente nos livros didáticos. O ato de calcular como um exercício meramente teórico

pode ter-se tornado a base de um modo de raciocínio que exclui outros modos de pensar matematicamente o mundo social.

Assim, acreditamos que é possível gostar de Matemática. A experiência da leitura que segue é uma tentativa de conquistar os leitores e propiciar outro modo de ver e perceber essa ciência – assim definida por Aristóteles, Platão e Comte – ou linguagem – conforme afirmou Leibniz: "A matemática é a linguagem com a qual Deus escreveu o Universo". Galileu (1564-1643)

4.2 Conhecendo o passado dos números

Você já pensou como seria a nossa vida se o homem não tivesse criado os conjuntos numéricos? São poucas as pessoas que fazem essa reflexão! A grande maioria costuma afirmar que não gosta de Matemática. Mas, será mesmo? Talvez apenas não compreendam

⁴ Fonte: http://kdfrases.com/frase/142657

a linguagem Matemática que é ensinada na Educação Básica. Não há, entretanto, como negar: a Matemática já fazia parte da sua vida muito antes de você ser apresentado a ela!

Você já observou a sua certidão de nascimento? Quantas informações numéricas ela contém? Data e horário são apenas algumas delas, mas também podemos encontrar o número da folha, do livro e a ordem em que se lavrou o registro, entre outros detalhes. Observe que, desde o seu nascimento, os números foram necessários para representar todo o seu desenvolvimento. Quantas semanas de gestação você precisou para nascer; qual sua massa (chamamos incorretamente de "peso"); altura, e tudo mais. Perceba que os números foram e estão presentes durante toda a nossa vida, seja no pediatra, na vida escolar, durante a adolescência e na vida adulta.

Ainda não se convenceu da importância dos números na sua vida e na sociedade em que vivemos? Vamos, então, refletir um pouco mais: como organizar bilhões de pessoas se não fosse a linguagem matemática? Somente pelos nomes? Sabemos que isso seria inviável e impossível! Afinal, o número de homônimos é enorme. Logo, com a utilização dos números, para representar cada indivíduo, é possível fazer a distinção necessária; por isso, atualmente temos o Registro Geral - RG e o Cadastro de Pessoa Física (CPF). Acha pouco, não é mesmo? Que tal olharmos ao nosso redor? Números representam não só o valor das mercadorias que desejamos obter como também as suas dimensões. Utilizamos os números para registrar os automóveis, cobrar impostos, quantificar a produção de alimentos, mensurar temperatura, diferenciar os canais de TV, telefone, endereco etc. Diante desses exemplos, será que podemos pensar em um mundo sem os números? Certamente a sua resposta será não.

A Matemática, como ciência, é fruto de um grande esforço da humanidade para resolver problemas do cotidiano, que surgiram e ainda surgem; portanto, não podemos afirmar que a Matemática é uma ciência pronta e acabada. Muito pelo contrário, ela é uma ciência que está em constante evolução. É uma produção cultural, criada por pessoas em um determinado lugar e influenciada por um contexto histórico, social e econômico, a qual se ajusta a outras ciências e atividades humanas devido ao avanço das tecnologias e da medicina

O mais fascinante em tudo isso é que a Matemática não foi criada ou inventada somente por grandes gênios, como geralmente aprendemos na escola. Sim, temos muitos homens e mulheres que se destacaram; mas, muitos conhecimentos foram desenvolvidos por pessoas simples, com vida simples, que ficaram no anonimato e assim estão até os dias atuais, ou seja, a Matemática é uma ciência que pode ser estudada por todos, inclusive por mim e por você. Vamos conhecer um pouco da história dessa disciplina?

Ninguém sabe ao certo quando a matemática começou a ser praticada pelo homem.

O que os historiadores afirmam é haver evidências de que o desenvolvimento da Matemática se deu concomitantemente ao da escrita. O que sabemos é que, por volta de 5.000 a.C., a Matemática começou a surgir como atividade. Os primeiros registros dessa atividade datam de 4.000 a.C. A maioria das evidências que temos a respeito desse período provém da região compreendida entre os rios Tigre e Eufrates (na Mesopotâmia, que hoje corresponde ao Iraque) e das terras férteis do vale do Nilo (Egito).

Antes mesmo da descoberta – ou invenção – dos números e da teoria dos conjuntos, o hábito de fazer correspondência e/ ou comparação entre conjuntos de objetos já era praticado pelo homem primitivo. Pense você, não é preciso saber contar para perceber se uma mesa para oito lugares está completa ou não, basta observar se há lugares vazios. Quando o homem deixou de ser nômade e começou a se organizar em pequenos grupos para garantir seu sustento, precisou criar

animais; nesse momento, surgiu a necessidade de controlá-los. É comum a associação da história dos números à necessidade de contagem e utilizarmos o exemplo de pastores que precisavam controlar o rebanho por meio da correspondência de cada animal a uma pedra. Assim, eles podiam mover pedras de uma pilha para outra sem ter nenhuma noção do conceito de contagem.

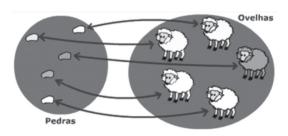


Figura 2 − Relação biunívoca Fonte: www.apoioescolar24horas.com.br, vide⁵

⁵ http://www.apoioescolar24horas.com.br//salaaula/estudos/matematica/340_numeros_naturais/?cod_aula=6351&sNivelEduca=efaf#pag2-tab

Observe que fazer essa correspondência não significa que você numeralizou; mas que, para cada ovelha, existe uma pedra. Naquela época, você colocaria as pedras em um saco e diria: "Tenho 'isso' de ovelhas!". Contam os nossos antepassados que foram os pastores os pioneiros a indagar, no cair da tarde, quando olhavam para as suas ovelhas, se tinham a sensação de possuir mais ovelhas. E esse desconforto levou-os a pensar em um modo de controlar o aumento ou a diminuição do seu rebanho. Então, estabeleceram as primeiras correspondências usando pedrinhas. Sanado esse problema, outros surgiram! Com o aumento do rebanho, o peso de sua bolsa carregada de pedras dificultava o transporte do pasto para casa e vice-versa. A situação de não querer carregar todo aquele peso levou o pastor a procurar outras estratégias, de modo que as marcas na areia, nos ossos e, até mesmo, nos galhos das árvores, substituíram as coleções de pedrinhas. Assim, o homem começou a fazer os primeiros registros.

Conforme as sociedades iam desenvolvendo-se, tornou-se necessário criar meios de registrar os objetos. O primeiro marcador foram os ossos, depois vieram varas e, até mesmo, partes do corpo humano, indicando diferentes números. Os rebanhos e as plantações cresciam, as "cidades" surgiam; e, com elas, as diferentes formas de governo. Demandas tais como cobrança de impostos, divisão de herança e outras necessidades administrativas impulsionaram o desenvolvimento do sistema de contagem e de numeração.

4.3 Olhando e numeralizando ao nosso redor

Você já parou para olhar a beleza da natureza e de tudo aquilo que nos cerca? Parou para admirar uma obra de arte? Algum dia você se viu no espelho e achou que uma parte do corpo tinha medidas semelhantes com outras partes? Nós, seres humanos, temos essa capacidade de olhar, comparar, admirar,

relacionar etc. Essas capacidades são inerentes ao ser humano, mas... O que tudo isso tem relação com os números? Como você iria contar quanto de água tem na figura a seguir? Usaria que objeto? Escreveria esse resultado com qual número? Usaria um balde, um copo ou uma garrafa?









Figura 3 – Cachoeira, balde, garrafa e copo Fonte: Figuras retiras da internet⁶ e foram consultadas quatro páginas.

⁶ Cachoeira: http://oficinadeoportunidade.blogspot.com. br/2013_11_01_archive.html; Balde: http://www.panelaecia.com.br/utensilios/baldes-de-aluminio/balde-32. html, Garrafa: http://www.imperiodasessencias.com. br/garrafa-de-vidro-imperio-c-rolha-200ml-p2517, copo: http://funnyart.com.br/site/copos/

Existem coisas e objetos que podemos numeralizar usando o conjunto dos números naturais, como, por exemplo, três bolas de futebol. Com as quantidades líquidas, contudo, não é tão simples assim! Olhando para a cachoeira, da figura anterior, poderíamos medi--la usando o copo, a garrafa ou o balde? Seria tão simples quanto bolas, maçãs, pirulitos etc.? Parece que não! Para líquidos, gases, e massas, o homem precisou criar uma unidade artificial para conseguir numeralizar. Dessa forma, ele criou o litro, o metro cúbico, o quilograma, a onça (unidade de peso igual a um décimo sexto de uma libra ou 16 dracmas ou 28,349 gramas), o hectare para medir extensões de terra, e muitas outras. Para se chegar a tantas unidades de medidas, a humanidade precisou de milhares de anos testando e experimentando, criando instrumentos que fossem capazes de precisar o grama, o miligrama e muitas outras unidades ainda menores.

Na pré-história, a relação do ser humano com as quantidades da natureza não se estabelecia de modo racional, mas por meio de uma abstração, pois era dada uma espécie de sentido qualitativo, em que se percebia a qualidade de ser animal, vegetal, grande, pequeno, forte etc., referir-se às capacidades de distinção entre o muito e pouco, o pequeno e o grande, por exemplo.

A isso, o historiador matemático Tobias Dantzig (1967, p. 200) chamou de senso numérico:

"O homem, mesmo nas mais baixas etapas de seu desenvolvimento, possui a faculdade que, por falta de um nome melhor, chamarei de senso numérico. Essa faculdade permite-lhe reconhecer que alguma coisa mudou em uma pequena coleção quando, sem seu conhecimento direto, um objeto foi retirado ou adicionado à coleção. O senso numérico não deve ser confundido com contagem que, provavelmente, é

muito posterior, e que envolve, como veremos, um processo mental bastante intrincado. A contagem, pelo que sabemos, é um atributo exclusivamente humano, apesar de algumas espécies irracionais parecerem possuir um senso numérico semelhante ao nosso".

Para ilustrar essa ideia, o mesmo autor conta uma fábula que ilustra o "senso numérico":

Certa vez, um urubu fez um ninho na torre da capela de uma fazenda. O fazendeiro resolveu matá-lo. Mas, toda vez que entrava na torre, o urubu voava até uma árvore distante e, de lá, com a sua vista de grande alcance, esperava até o homem sair da torre, quando voltava para o ninho. O fazendeiro resolveu, então, entrar com um empregado, permanecendo lá dentro e mandando o empregado sair. O urubu, porém, não se deixou enganar: ficou na árvore e só voltou quando o fazendeiro saiu da torre. O homem não desistiu e entrou com dois empregados na torre,

ficando lá novamente, enquanto os dois saíam. Ainda não foi dessa vez que o urubu caiu na armadilha, esperando a saída do fazendeiro. E assim, repetidamente, o patrão tentou a manobra com três, quatro empregados sem conseguir nada. Só quando entrou com cinco, o urubu voltou ao ninho, ao ver sair o quarto empregado. O seu "senso numérico" só ia até quatro, e, por não saber contar mais que isso, acabou caindo na armadilha. (DANTZIG, 1967, p. 200-201).

O conceito de senso numérico e seus esforços para tentar defini-lo estão apenas em seus estágios de formação apesar de este conceito ter sido apresentado pela primeira vez em 1954 por Tobias Dantzig.

Nesse sentido, a partir dos movimentos da natureza – como os fenômenos cíclicos, dia, noite, fases da lua etc. –, o homem passou a observá-los com frequência e a controlá-los de alguma forma. Ao registrar essas observações da natureza, o homem começou a fazer uso

dos números. Isso lhe permitiu a elaboração de uma ação intencional no sentido de favorecer sua fixação em determinados lugares. Fazer esse controle dava ao homem a possibilidade de se manter e de garantir a sua alimentação por meio do plantio e uso da terra. Além disso, as espécies de animais domesticáveis poderiam ser controladas e organizadas em rebanhos e o homem, ao fixar-se em um dado local, pôde abandonar a prática de nômade.

O homem organizou-se socialmente em comunidades primitivas, e passou a ser o produtor de seus próprios alimentos. Mesmo não abandonando a ideia extrativista, a agricultura e a pecuária passaram a ser as atividades que mais ocupavam o homem; portanto, as que mais criavam problemas. E, para superá-los, o homem foi criando instrumentos e uma complexa rede de ideias. Essas passaram a fazer parte de sua forma de compreender o mundo e sua própria humanidade.

É como produtor que o homem se defronta com a sua primeira necessidade de uma matemática: a necessidade do registro e do controle do movimento das variações quantitativas, ou seja, das quantidades das coisas.

4.4 Dos números aos problemas

Os números... Já pensou como seria a vida sem eles? Poderíamos comer, dormir, viver sem problema. Mas, já pensou na ordem das coisas? Na comunicação? Na tecnologia? Os números constituem uma linguagem em códigos que facilita nossa comunicação, dando uma ordem universal. Apresentamos, no item anterior, um pouco da história de nossos antepassados e que relação eles tinham com os números, visto que os conjuntos numéricos surgiram para facilitar a comunicação entre os povos e para tornar as informações mais precisas. A necessidade de o homem controlar a natureza o levou a procurar formas para

gerenciar grandes quantidades. E foi, na contagem, que ele encontrou as respostas a suas indagações. Embora inicialmente não se utilizassem os algarismos, esse momento pode ser registrado como o início do desenvolvimento do conceito de número.

Os números têm múltiplos usos na atualidade, pois eles aparecem como sequência verbal, como código, na contagem, na medida e na ordem. Logo, é necessário esclarecermos que nem sempre uma criança consegue repetir a sequência verbal, mas é possível afirmar que ela compreende o sentido do número. Quando uma criança repete o seu endereço ou número do seu telefone, ela não tem uma compreensão do número, pois memorizou o código. A compreensão do significado desse número depende de outros fatores. Por exemplo, quando uma criança que tem três anos separa seus três dedinhos para indicar sua idade, ela não está ciente do que isso significa, tanto assim que, quando se pede a representação com outros dedos, na maioria das vezes, ela não consegue, pois se trata de um código que ela memorizou, por isso sua representação somente pode ser feita com os mesmos dedinhos. A criança domina o sistema de numeração quando ela consegue relacionar a quantidade de objetos com o algarismo cinco, como mostra a figura a seguir:



Figura 4 – Representação do numeral cinco Fonte: http://www.educarx.com/2013/10/imagens-de--numero-0-ao-10-para-colorir.html

Após o surgimento da noção de número, foram constituindo-se os diferentes conjuntos

numéricos na procura de dar resposta às novas necessidades. Sendo assim, a contagem reconhece-se como uma correspondência entre elementos de uma coleção e os números naturais. A escola busca organizar e construir esses conhecimentos provenientes do nosso cotidiano. Quando o professor vai ensinar os números naturais, por exemplo, os alunos já reconhecem os numerais, já conseguem organizar coleções de quantidades indicadas, têm um conhecimento básico do sistema posicional (expressado no manejo do dinheiro e usado nas suas brincadeiras).

Você se lembra de como foi que aprendeu a contar? Provavelmente seus pais lhe ensinaram a decorar a sequência numérica, e você deve ter repetido para seus avós, tios e amigos da família. Esse processo foi natural já que todos nós incorporamos a contagem memorizando. Mas, você cresceu... E foi para escola! Seus professores complementaram seu aprendizado colocando alguns problemas

e pedindo diferentes estratégias de contagem. Aprendeu a compor e decompor, manipulou jogos, resolveu situações-problema, e tudo isso ocorreu para que você pudesse compreender que, além da contagem, havia a necessidade de comunicar as quantidades.

Compreendemos o significado do número "cinco" quando estabelecemos um sentido de comunicar situações, resolver problemas em que essa quantidade está envolvida. Você já pensou em quantos habitantes há na sua cidade? O número de habitantes de uma cidade é compreendido quando nós estabelecemos uma relação entre o algarismo e a sua grandeza. A situação a seguir poderá esclarecer essa ideia.

Vamos supor que o prefeito da cidade *Matemalândia*, que tem 112.500 habitantes, quer convidar todos os habitantes para um concerto. O primeiro problema do prefeito é em relação ao local a ser usado. Em *Matemalândia*, existe um teatro com capacidade para

10.000 pessoas. Quantos concertos deverão ser programados para garantir que todos assistam ao concerto? Respondendo à questão, precisamos imaginar quantos concertos serão necessários.

Uma primeira ideia seria pensar quantos 10.000 cabem em 112.500. Ao responder 11 vezes, nós temos a operação 11 x 10.000 = 110.000, porém 2.500 pessoas ficarão sem assistir ao concerto. Isso quer dizer que nem sempre nossa resposta a determinado problema pressupõe uma operação lógico-matemática, cuja divisão resultaria em um número decimal. A resposta correta seria: necessitaríamos de 12 apresentações deste concerto para que todos os moradores pudessem ter a oportunidade de assistir, pois 12 x 10.000 resultará em 120.000.

E essa quantidade, embora maior que a população da cidade, é necessária para que todos assistam ao concerto. Depois, poderíamos questionar: quantas mesas foram colocadas no teatro, sabendo que cada mesa tem quatro cadeiras? Para resolver essa questão, é preciso dividir a quantidade total de lugares do teatro por quatro, e assim temos: 10.000 : 4, que resulta em 2.500. Portanto, a resposta é 2.500 mesas.

Um uso atribuído aos números racionais está em nossa cozinha. Nela, temos outro exemplo que pode nos proporcionar um aprendizado em matemática. Em uma receita, precisamos conhecer os números que indicam as quantidades para que a receita seja um sucesso, pois eles são importantes se necessitarmos aumentar ou diminuir as quantidades em função das pessoas que vão consumir tal produto.

Nas receitas, em geral, aparecem os números racionais. Dentre eles, estão as frações. Por exemplo, supondo que a receita utilizada para quatro pessoas precisa de 1/3 de farinha de trigo, quanto a mais de farinha vou

precisar para preparar uma porção para oito pessoas? E para seis pessoas?

O intuito de relacionar a Matemática e a cozinha é que as diversas receitas utilizam, em seus processos, números fracionários, como 1/2 (meia) xícara, 1/3 (um terço) do copo americano, entre outras medidas. A adição, a subtração, a multiplicação e a divisão são aplicadas nos processos constantemente. Observe a receita a seguir:

Pão de queijo - 30 porções
1/2 copo de óleo de soja
1 copo de leite
4 ovos
250 g de queijo meia cura
1/2 kg de polvilho doce
1 colher (sobremesa) de sal

Com base na receita apresentada, como ficaria se tivéssemos por objetivo obter 15

porções. Para cada item, teremos de fazer os seguintes cálculos: ½ copo de óleo de soja, ½: $2 = \frac{1}{4}$ (essa é a nova quantidade); 1 copo de leite passa a ser $1 : 2 = \frac{1}{2}$ copo de leite; 4 ovos, 4 : 2 = 2 ovos; 250 gramas de queijo meia cura, seria 250 : 2 = 125 gramas; ½ kg de polvilho doce, passaria a ser ½ : $2 = \frac{1}{4}$ kg ou 250 g (gramas) – lembre-se de que 1 kg é o mesmo que 1.000 gramas –; 1 colher (sobremesa) de sal seria agora $1 : 2 = \frac{1}{2}$ colher.

Entretanto, se quisermos aumentar para 60 porções, como ficaria a receita? Ela deverá ser composta das seguintes quantidades:

1 copo(s) de óleo de soja

2 copos de leite

8 ovos

500 g de queijo meia cura

1 kg de polvilho doce

2 colheres (sobremesa) de sal.

Problemas semelhantes a esse indicam que os cálculos que aprendemos na escola utilizando os números racionais podem auxiliar-nos em atividades do nosso dia a dia.

4.5 Brincando com as aplicações dos números

Diariamente, nós nos deparamos com números! Por onde andamos, temos a impressão de que os números nos acompanham sempre! Seja nos ônibus, nos trens, nos supermercados, nas lojas, nas ruas etc. Onde quer que você tenha andado, há números!

Quando entramos em um supermercado, podemos observar uma infinidade de números em todas as seções. Vamos, então, passear pela seção de frutas e verduras. Quantas maçãs ou peras são necessárias para formar 1 kg? Quais os valores para 1,5 kg de maçã, e para 1,5 kg de pera? Serão necessárias mais maçãs ou mais peras para compor um quilo?



Maçã Nacional - KG R\$ 3,00



Pera Nacional - Kg

R\$ 5,00

Figura 5 – Frutas e os preços por quilo Fonte: Maçãs: http://www.novaessencia.com.br/ essencias-nv/2748-essencia-nv-bergamota-pp-500006. html; Peras: http://www.treinosacademia.com.br/as-4-frutas-que-eliminam-gordura/

Quantas comparações podemos fazer, e cada uma nos ajuda a entender melhor a questão de quantidades. Você poderá comprovar essas comparações usando uma balança. Em média, o peso de cada tipo de fruta é de aproximadamente 200 g; assim, para compor 1 kg, é necessário juntar aproximadamente cinco frutas, sejam elas maçãs ou peras. Em relação ao preço, usando os valores fictícios que apresentamos na figura, poderíamos usar dois procedimentos diferentes, que resultam no mesmo total. Um primeiro caminho seria pensar: se 1 kg de maçãs custa R\$ 3,00, 500g (ou seja, meio quilo) custará a metade desse

valor, ou seja, R\$ 1,50. Somando os dois valores, obtêm-se R\$ 4,50. Da mesma forma, analisamos o valor das peras: a metade de R\$ 5,00 é R\$ 2,50; logo, 1,5 kg será R\$ 5,00 + R\$ 2,50, o que resulta em R\$ 7,50. Outro modo de resolver essa questão é utilizando os números decimais. Nesse caso, "um quilograma e meio" é representado pelo número 1,5; portanto basta multiplicar os dois valores: 1,5 kg x R\$ 3,00 = R\$ 4,50. Esse segundo modo é sempre visto por nós nas balanças digitais.

O que pesa mais: Cinco tomates ou nove laranjas? Nosso senso numérico nos ajuda a avaliar, de modo intuitivo, qual das quantidades pesa mais. Poderíamos comprovar essa questão usando uma balança, mas não é esse o nosso objetivo aqui.





Figura 6 – Laranjas e tomates Fonte: Laranjas: http://br.freepik.com/fotos-gratis/ laranjas_349299.htm; Tomates: http://wp.clicrbs.com. br/betobarreiros/2012/01/27/a-sabedoria-popular--nem-sempre-esta-correta/?topo=67,2,18,,,67

O que você analisaria para afirmar que um deles pesa mais do que o outro? Observe que essas figuras podem ter proporções diferentes, e isso nos levaria a pensar que possuem pesos iguais. A esse olhar chamamos de "ilusão da unidade". Isso acontece quando acreditamos possuir uma unidade que não é natural. Por exemplo, quando compramos um litro de leite, temos a ilusão de que, naquele recipiente, existe exatamente um litro. Dependendo do controle de qualidade da empresa, poderá ter mais ou menos leite. Todas as unidades artificiais que foram criadas

pelo homem geram em nós uma ilusão. Essa criação foi necessária na medida em que o homem precisou controlar volumes, gases, massas etc. Então, considerando esses frutos pertencentes ao tipo comum que é vendido nas feiras livres, nove laranjas pesam mais que três tomates.

Assim, nós podemos ter os números como nossos aliados ou como nossos inimigos. Aliados quando podemos perceber se um produto está, de fato, na promoção, e inimigo quando, de alguma forma, somos iludidos a acreditar que a promoção é verdadeira. A Fundação PROCON – Programa de Proteção e Defesa do Consumidor - esclarece que, muitas vezes, a promoção funciona apenas como uma "maquiagem" de preços. Muitos vendedores inflam o valor inicial dos produtos para depois dar descontos supostamente atraentes; entretanto, esse tipo de prática é, na verdade, propaganda enganosa.

Esse é outro exemplo típico de como as pessoas são enganadas pelos números. Vamos supor a seguinte propaganda:

Tabela 1 – Simulação de empréstimo

Faça um empréstimo de R\$ 5.000,00 e pague em suaves prestações!

Você tem duas situações para escolher. Em 36 ou em 60 parcelas

Parcelas	Valor da parcela
36	R\$ 264,43
60	R\$ 242,27

Fonte: Elaborado pelos autores

Olhando os números, você poderia dizer: O valor é realmente baixo! Eu consigo pagar! Essa ilusão acontece com muita frequência em nossa sociedade. Observa-se somente o valor da parcela e é ignorado o real valor daquilo que realmente está sendo cobrado. No caso em que a parcela é de R\$ 264,43, saiba que é paga uma taxa de juros de 4% a.m.; mas, como o valor dos juros está diluído nas

parcelas, o consumidor não percebe que é aplicada uma taxa abusiva. Para a segunda condição (em 60 meses), a situação é ainda pior, pois a taxa é da ordem de 4,5% a.m. Para você ter uma ideia, o valor de juros pago na situação 1 é R\$ 4.519,48, ou seja, quase o mesmo valor do empréstimo de R\$ 5.000,00. Na situação 2, em 60 meses, os juros totalizam R\$ 9.536,20, ou seja, quase duas vezes mais o valor emprestado. Sem dúvida, olhar somente o valor da parcela é um erro muito comum das pessoas.

4.6 A arte também é expressa com números

Passamos pela história, pelo uso dos números e das necessidades que o homem teve desde sua existência na busca de controlar o que estava à sua volta. A arte expressa nas construções, nas pinturas e esculturas utilizou a Matemática para criar uma junção entre a beleza e o rigor. Quando pensamos em arte, precisamos entender que existe o exercício

da lógica nas resoluções estéticas elencadas e aplicadas pelos artistas em suas pesquisas visuais. Número áureo, simetria, equilíbrio e proporção, composições modulares, abstração geométrica são exemplos da relevância da Matemática para as produções artísticas desde a Renascença até os dias atuais. Podemos perceber que, nos templos da Grécia Antiga, na arquitetura renascentista ou na construção de Brasília, estão presentes pensamentos de homens que construíram complexas estruturas na busca da estética do raciocínio.

O número de ouro ou número áureo, também conhecido como a proporção áurea, ou pela letra grega ϕ (*phi*), foi pensado na divina proporção e é um número irracional que tem infinitas cifras decimais. Ele aparece na relação entre o grosso dos galhos principais de uma árvore e seu tronco, presente também na relação entre a altura de uma pessoa e o comprimento do umbigo aos pés, e, ainda, na

razão entre a altura e a largura dos objetos e pessoas que aparecem nas obras de Miguel Ângelo e Leonardo Da Vinci, e até nas estruturas formais das sonatas de Mozart.

Este número ganha esse nome de destaque por estar presente em diversos lugares da natureza, no corpo humano e no universo, assim como outros, por exemplo, o π (Pi), estão presentes no mundo por uma razão matemática existente na natureza. Essa sequência aparece na natureza, no DNA, no comportamento da refração da luz, dos átomos, nas vibrações sonoras, no crescimento das plantas, nas espirais das galáxias, nos marfins de elefantes, nas ondas no oceano, nos furações etc. Estes não são, contudo, os únicos cenários onde o número áureo aparece, pois também está presente nas pirâmides do Egito e nas construções gregas como o Partenon.







Figura 7 – Imagens do Partenon, Torre Eiffel e Monalisa Fonte: Paternon: http://roble.pntic.mec.es/~tvirgos/ matematicas/partenon.htm; Torre Eiffel: http://www. canstockphoto.es/ilustraci%C3%B3n/tower-eiffel.html; Monalisa: http://www.sabercultural.com/template/ obrasCelebres/LeonardoDaVinciMonaLisa.html

O expoente representante do surrealismo é o espanhol Salvador Dali, que usou, em suas obras, essa relação. Em suas obras de arte onde aparece o número de ouro, a imagem é agradável aos nossos olhos. Você acha linda a torre Eiffel? Saiba que ela também foi construída respeitando a proporção áurea.

As faces e os corpos mais harmoniosos são os que cumprem com esta razão. Você gostaria de saber se suas medidas cumprem esse número e revela essa razão? Prepare-se: pegue uma fita métrica e preencha a tabela que apresentamos logo a seguir (lembre-se de que a unidade a ser considerada é o centímetro):

Tabela 2 – Relações entre comprimento, distância e medida.

Compri-	Distância	Medida
mento		
A	Do umbigo ao pé	
В	Da cabeça ao umbigo	
С	Do umbigo ao joelho	
D	Do joelho ao pé	
E	Do queixo ao umbigo	
F	Da cabeça ao queixo	
G	Da cabeça ao chão (Altura)	
Н	Do início da testa até o final do queixo	
I	Do início da testa até o início do nariz	
J	Do início do nariz até o final do queixo	

Fonte: Elaborado pelos autores.

Apresentaremos uma definição do número de ouro que é representado pela letra grega $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ phi$ e é obtido pela proporção = 1.61803399...

Por que o número áureo é tão importante? Seria por que ele representa a perfeição, a beleza da natureza? A resposta é simples: porque ele aparece em quase todo lugar na natureza e nas coisas que consideramos mais belas.

Matematicamente, demonstraremos isso usando uma forma mais simplificada de se chegar ao número de ouro; portanto, vamos utilizar o processo a seguir.

Considere o segmento de reta, cujas duas extremidades se denominarão de A e C, e coloque um ponto B entre A e C (nesse caso, o ponto B estará mais perto de A), de maneira que a razão do segmento de reta menor (AB) para o maior (BC) seja igual à razão do maior segmento (BC) para o segmento todo (AC):



A razão entre os comprimentos destes segmentos designa-se habitualmente por seção áurea.

Logo:

$$(AB) / (BC) = (BC) / (AC)$$

Pode-se, então, definir o número de ouro se fizer:

$$AB = y$$
; $BC = x$; $AC = x + y$

O número de ouro vai ser a razão entre x e y:

$$y/x = x/(x+y)$$

Se ainda substituir y por 1, o resultado será:

$$1/x = x/(x+1)$$

Multiplicando ambos os lados por $x \cdot (x + 1)$, obtém-se:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática, são encontradas as seguintes soluções:

$$x1 = (1 + \sqrt{5})/2$$
 e $x2 = (1 - \sqrt{5})/2$

Não se irá considerar o segundo valor (x_2) , considerando que o comprimento de um polígono nunca poderá ser negativo. Dessa forma, chega-se ao que se pretende, isto é, ao tão esperado número de ouro:

$$\Phi$$
 (Phi): $\Phi = (1 + \sqrt{5}) / 2$
 $\Phi = 1,6180339...$

Agora use suas medidas anotadas na página anterior, e calcule as seguintes razões:

Tabela 3 - Anotações das razões entre as medidas

$\frac{A}{B} = []$	$\frac{C}{D} = []$
$\frac{E}{F} = []$	$\frac{G}{A} = []$
$\frac{H}{J} = []$	$\frac{J}{I} = []$

Fonte: Elaborado pelos autores.

Calculado o valor de cada razão, visto que, para isso, basta você dividir o valor do numerador da fração pelo seu denominador, observe os resultados obtidos nessa divisão. Quão perto estão eles do número de ouro? Lembre-se de que o número 1,6180339... Que possui infinitas casas decimais é conhecido como número de ouro.

Na reprodução dos coelhos e na árvore genealógica das abelhas, também achamos a sucessão de Fibonacci, e esta tem estreita relação com o número áureo. Além disso, quando tomamos cada uma das duplas de números consecutivos, sempre é possível achar a razão entre eles, denominado número de ouro.

O matemático italiano Leonardo de Pisa nasceu na Itália por volta de 1175, e ficou conhecido como Fibonacci (filho de Bonaccio). A partir da publicação do livro Liber Abacci (livro do Ábaco), em 1202, Fibonacci tornouse famoso, principalmente devido aos inúmeros temas desenvolvidos nesse trabalho,

visto que foram abordados estudos sobre o clássico problema envolvendo populações de coelhos, considerado a base para o estabelecimento da célebre sequência (números) de Fibonacci

A teoria presente no livro Liber Abacci é ilustrada com vários problemas. Um deles é o problema dos pares de coelhos, que diz: Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano? Um homem tem um par de coelhos em um ambiente inteiramente fechado. Desejamos saber quantos pares de coelhos podem ser gerados deste par em um ano, se de um modo natural a cada mês ocorre a produção de um par e um par começa a produzir coelhos quando completa dois meses de vida. Como o par adulto produz um par novo a cada 30 dias, no início do segundo mês, existirão dois pares de coelhos, sendo um par de adultos e outro de coelhos jovens, assim, no início do mês 1, existirão 2 pares: 1 par adulto + 1 par recém-nascido.

E tal processo continua nos diversos meses até completar um ano. Observa-se essa formação no gráfico com círculos. Também se pode perceber que a sequência numérica, conhecida como a sequência de Fibonacci, indica o número de pares ao final de cada mês: {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34...}.

Pode-se verificar que a razão entre os termos dessa sequência convergirá para o número de ouro. Além do número de ouro, existem infinitos outros números irracionais. O número pi (π) é outro exemplo de irracional. Ele consegue definir a relação entre a longitude da circunferência e seu diâmetro, sem importar o tamanho da circunferência. Para compreender o valor do π , vamos agora calcular esse número.

Observe a seguinte circunferência:



A circunferência é o comprimento ao redor de toda a borda do objeto. Por ser redonda, pode ser difícil medi-la (por isso que o pi é tão importante). Estenda um barbante o mais próximo possível do círculo; marque o ponto em que ele dá uma volta completa; em seguida, meça seu comprimento usando uma régua. Meça o diâmetro da circunferência. O diâmetro **d** é a medida de um lado do círculo até o outro, passando pelo centro da circunferência. A circunferência de um círculo é encontrada pela fórmula $C = \pi . d = 2 . \pi . r$. Sendo assim, pi é igual à circunferência dividida pelo diâmetro. Digite os números na calculadora: o resultado deve ser aproximadamente 3,14. E essa relação sempre será 3,1416...

Outro número irracional é o número **e**, ou número de Euler, muito importante não só na Matemática, mas também na economia, além de ser a base dos logaritmos naturais. De acordo com o professor Nilson José Machado

(1990), a grande maioria dos Números Reais é do tipo irracional. Dentre os infinitos números irracionais, o número PI (π) e o número de Euler (e) são duas constantes de grande importância em diversas áreas científicas e, também, na própria Matemática. O número de Euler como um número irracional é aproximadamente 2,718281...

Historicamente, os babilônios haviam aproximado o valor do número de Euler, em cálculos financeiros, mas não há indícios da compreensão deste fato, pelo caráter empírico da Matemática desse povo. Um tablete de argila dos antigos babilônios, datado de cerca de 1.700 a.C., propõe um problema envolvendo uma questão de investimento: "Quanto tempo levará para uma soma de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20% de juros compostos anualmente?". Em linguagem matemática atual, ao final de cada ano, o capital inicial deverá ser multiplicado por um fator 1,2. Assim, em t anos, o capital será

crescido de um fator 1,2^x. Como o problema solicita em quanto tempo o capital dobra, isso significa resolver a equação exponencial 1,2^x = 2. A resposta para essa questão recai em um número irracional. Na época dos antigos babilônios, tal problema foi resolvido por aproximação. A aproximação de um número irracional para um número racional.

Assim, o número \mathbf{e} pode ser compreendido pelos alunos do Ensino Médio usando a fórmula binomial de Newton, em que $n = \{1, 2, 3, 4...\}$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot (1 - 0) + \frac{1}{3!} \cdot (1 - 0) \cdot (1 - 0) + \dots = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 2,7182818$$

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) afirmam que tanto a Ciência como a Arte respondem a essa necessidade de busca de significações na construção de objetos de

conhecimento, os quais, juntamente com relações sociais, políticas e econômicas, sistemas filosóficos, éticos e estéticos, formam o conjunto de manifestações simbólicas das culturas. Ciência e Arte são, assim, produtos que expressam as experiências e representações imaginárias das distintas culturas, e estas se renovam através dos tempos, construindo o percurso da história humana (BRASIL, 1998).

Arte e Matemática podem encontrar seu sentido, seu significado, seu potencial, quando, no ensino de Matemática, a relação entre esses dois campos pode ser considerada. Seja construindo uma atividade que envolva arte, ou usando uma obra de arte em ambiente de ensino, emerge uma contribuição interessante aos estudantes quando constroem conhecimentos matemáticos, geométricos, refletem sobre um artista e sua obra de arte, recriam e criam seus novos modelos e trabalhos no tempo e no espaço ao qual estão inseridos.

4.7 Um problema que envolve números primos: O Crivo de Eratóstenes

Eratóstenes nasceu na Grécia no ano 230 a.C. Foi bibliotecário da Biblioteca de Alexandria no Egito, e criou um método simples e prático para achar os números primos. Números primos referem-se ao conjunto dos números naturais maiores que 1, que tem somente dois divisores: o 1 e ele mesmo. Vamos ver em que consiste o método proposto por Eratóstenes?

Primeiramente, precisamos desenhar uma tabela de 10 x 10 e escrever os números de 1 a 100, como apresentamos na tabela a seguir. Em seguida, faremos um "x" no número 1, porque ele não pertence ao nosso conjunto; depois, circularemos o 2, e, finalmente, escreveremos um "x" em todos os múltiplos do número dois. Circularemos o 3, e realizaremos igual procedimento, fazendo um "x" em todos seus múltiplos. E esse procedimento irá se repetir, seguindo a ordem dos números da

tabela até chegar ao último número da lista. Os números que foram apenas circulados, ou seja, sem o "x", são os números primos menores que 100.

Tabela 4 - Números de 1 a 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fonte: Elaborado pelos autores.

Vamos refletir: O que aconteceria se o número 1 fosse primo? Uma das consequências seria a impossibilidade da decomposição em fatores primos, porque sendo 1 unidade e, em Z, elemento neutro da multiplicação, poderíamos colocar quantos 1's quiséssemos, modificando a decomposição.

Você também pode identificar os números primos gêmeos, aquelas duplas de números primos que têm uma distância de duas unidades, como o 3 e o 5, por exemplo. Você sabia da existência desses números? Também é possível realizar esse crivo, e constatar a Conjectura de Goldbach, a qual determina que "todo número par maior que 2 pode ser expresso como a adição de dois números primos". Você pode testar! Uma conjectura matemática é uma proposição que muitos matemáticos acham que deve ser verdadeira; porém, ainda não conseguiram prová-la.

Número primo é um número maior que 1, que somente é divisível por 1 e por ele mesmo. São primos os números 3, 5, 7, 11... O 6 não é primo, pois é divisível por 3 e por 2. A famosa Conjectura de Goldbach revela que todo número par maior que 3 é igual à soma de dois números primos. Por exemplo, 6 é igual a 3 + 3, 8 é igual a 3 + 5, 20 é igual a 7 + 13. Você pode ir verificando essa conjectura para cada um dos números pares, um a um. Os matemáticos já verificaram para milhares deles; no entanto, para que a conjectura vire um teorema, é preciso que alguém encontre uma prova que assegure que qualquer um dos infinitos números pares pode ser escrito como soma de dois primos. A proposição é muito simples; mas, até hoje, ninguém conseguiu demonstrá-la.

No exemplo aqui utilizado com os números de 1 a 100, conseguimos aplicar o crivo e observar quais são os números primos. Na teoria, pode ser feito para todos os números primos; porém, o inconveniente é que, quanto maior for o número primo, mais difícil será a aplicação desse crivo de Erastóstenes, pois o esforço aliado ao tempo gasto começará a aumentar.

As expressões "números triangulares" e "números quadrados" não são apenas metáforas, efetivamente para os olhos dos Pitagóricos, pois eles são de fato triângulos e quadrados. Como os números poligonais foram descobertos pelos Pitagóricos no século VI a.C., um fato que ajuda no entendimento desse olhar é que, nesse tempo, os números eram representados com sementes sobre uma superfície. Esses números ligam a Geometria com a Aritmética

Os números poligonais exerceram sempre uma grande fascinação nos matemáticos, mas foi Cauchy quem estudou o problema da decomposição dos números inteiros em números poligonais. Ele demonstrou como qualquer número pode ser representado como a soma de três números triangulares, quatro números quadrados, cinco pentagonais e assim sucessivamente.

Vamos ver em que consistem esses números, observando os seguintes arranjos? Note que, no caso dos números triangulares, temos:

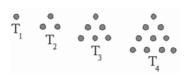


Figura 8 – Números Triangulares Fonte: http://www.iesarroyodelamiel.es/matematicas/ materiales/4eso/algebra/patrones/patrones.htm

Como ficaria o quinto arranjo? Quantas bolinhas são necessárias para formar o T_5 ?

Agora, preencha a tabela a seguir e encontre uma expressão geral para obter qualquer número triangular:

Tabela 5 - Números triangulares

N	1	2	3	4	5			n
T	1	3	6					T_n ?=

Fonte: Elaborado pelos autores.

$$T(1) = 1$$

 $T(2) = T(1) + 2 = 3$
 $T(3) = T(2) + 3 = 6$

$$T(4) = T(3) + 4 = 10$$

Do mesmo modo, você perceberá que é possível ir construindo essa relação, a fim de obter os resultados. Assim, apresentamos a Fórmula Recursiva para os números triangulares:

$$T(1) = 1$$

 $T(n+1) = T(n) + (n+1)$
 $T(n) = n.(n+1)/2$

(Fórmula Fechada para o cálculo do Número Triangular de ordem n)

Uma das anotações de Gauss em seu diário fala da alegria dele ao encontrar uma demonstração para o caso particular dos números triangulares: "todo número inteiro é o resultado da soma de três números triangulares". Por exemplo, o 36=15+15+6, em que o 15 e o 6 são números triangulares.



Figura 9 – Números quadrados Fonte: http://www.iesarroyodelamiel.es/matematicas/ materiales/4eso/algebra/patrones/patrones.htm

Quantas bolinhas terá o C_4 ? Preencha a tabela a seguir, e encontre uma lei de formação:

Tabela 6 - Números quadrados

n	1	2	3	4	5			n
C	1	4						C _n ?

Fonte: Elaborado pelos autores.

"A soma de dois números triangulares é um número quadrado". Verifique essa afirmação de maneira algorítmica e geométrica.

Qual o nome destes números? Que nome você daria para eles? Tente preencher a tabela e encontrar a fórmula para achar qualquer um.

$$\stackrel{\circ}{P_1} \stackrel{\circ}{P_2} \stackrel{\circ}{P_3}$$

Figura 10 - Números pentagonais

Fonte: https://www.google.com.br/search?q=balde&bi w=1920&bih=955&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ve d=0ahUKEwjy8qelo8XOAhXLg5AKHZShBqgQ_AUI BigB#tbm=isch&q=numeros+pentagonais

Tabela 7 - Números pentagonais

N	1	2	3	4	5			n
P	1							P _n ?

Fonte: Elaborado pelos autores.

Para finalizar, vamos verificar a afirmação de Cauchy, sobre a qual comentamos no início da nossa fala sobre os números poligonais, testando com os seguintes números:

Tabela 8 - Soma dos números

	Soma dos números triangulares	Soma dos números quadrados	Soma dos números pentagonais
40			
99			
75			

Fonte: Elaborado pelos autores

4.8 Finalizando...

Matemática significa, em grego, saber pensar. Ora, é o pensar que nos torna humanos. Segundo Lima (1994), o primeiro e principal objetivo da matemática é o de humanizar. O homem criou a Matemática para resolver os vários problemas colocados pela sobrevivência imposta no seu dia a dia, na alimentação, na vida em grupo e nas construções em seu habitat. Com ela e as outras linguagens, contudo, o homem criou o pensar e a sua racionalidade; recriou-se, assim, enquanto animal racional, elevando o animal à

razão. O homem criou a Matemática, e a Matemática criou o homem. Com ela, o homem resolve os grandes e pequenos problemas colocados em sua vida, no seu cotidiano.

Vimos, anteriormente, como a nossa civilização - desde os seus primórdios, com o surgimento das primeiras formações sociais, como a egípcia, babilônica, persa, chinesa, hindu etc.- desenvolveu-se com base no uso. cada vez mais intenso e extenso, da máquina humana. Em nosso século, essa redução do trabalho humano ao seu aspecto mecânico e repetitivo atingiu o seu ponto máximo. Chegou-se, assim, ao extremo de que, em todas as partes do planeta, a todo segundo, a maioria dos homens e mulheres passaram a viver condições de vida que atuam no sentido de transformá-los em máquinas produtivas. Também a educação, a mais humana das atividades sociais, devido exatamente a referida condição, sofreu uma brutal reversão de sua dinâmica e de seus fins. De atividade

libertadora do homem, a educação transformou-se em escravizadora, por buscar formar a máquina humana em vez do homem senhor do seu destino (LIMA, 1994).

A evolução e a criação dos números desde a Antiguidade até os dias atuais permitiram um progresso espantoso em vários campos da Matemática como a Aritmética, a Geometria, a Trigonometria e a Astronomia. Nosso cotidiano está repleto de números, e são eles, como vimos neste capítulo, que propiciam as interações com nossos semelhantes e com o mundo.

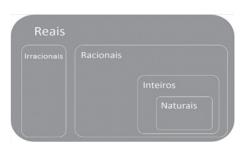


Figura 11 – Diagrama dos conjuntos numéricos Fonte: Elaborado pelos autores.

Dessa forma, passamos a compreender melhor que o conjunto dos números reais aprendido na escola é formado pela união dos números racionais com os irracionais. O esquema anterior nos mostra como a Matemática organizou os conjuntos numéricos, diferentemente do que a história nos apresenta. Esse modo é para facilitar a nossa compreensão de que um subconjunto está inserido em outro compondo um conjunto maior, chamado de conjunto dos números Reais. Além desse, temos outros conjuntos que ampliam nosso horizonte, os chamados números complexos, transcendentes, entre outros.

Leituras sugeridas

BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais:* arte. Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998

DANTZIG, Tobias. *Número*: a linguagem da ciência. Rio de Janeiro: Zahar, 1967.

ENZENSBERGER, Hans Magnus. *O diabo dos números*. Tradução de Sérgio Tellaroli. São Paulo: Cia. das Letras, 2009.

LIMA, Luciano; TAKASAKI, Mário; MOISÉS, Roberto P. *Momento de criar matemática* – Contando com coisas. São Paulo: CEVEC/CIARTE, 1994.

MACHADO, Nilson José. Matemática e língua materna. São Paulo: Cortez, 1990.

OLIVEIRA, Cláudio José. O Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e a formação de professores que ensinam matemática. *Série-Estudos* – Periódico do Programa de Pós-Graduação em Educação da UCDB Campo Grande, MS, n. 38, p. 223-235, jul./dez. 2014. Disponível em: http://www.serie-estudos.ucdb.br/index.php/serie-estudos/article/view/740/663>. Acesso em: 25 mar. 2016.

Física para todos: alunos cegos também tem o direito de aprender!

Maria Inês Ribas Rodrigues¹ Ricardo Silva Salmazo² Robson Rodrigues de Almeida³

Existe algo de intrigante quando nos deparamos com uma situação-problema que desperta nosso interesse. Parece que faz parte da natureza humana a busca por soluções, individualmente ou, ainda, quando estamos em

¹ Professora Doutora do Programa de Pós-graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática da UFABC.

² Mestre em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática da UFABC.

³ Mestrando do Programa de Pós-graduação em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática da UFABC.

equipe. Nesse caso, procuramos colaborar, trocando experiências e argumentando sobre os diferentes pontos de vista. E deve ter sido assim desde a época das cavernas, quando o trabalho que integrava os indivíduos era o que poupava maior energia em prol do bem comum.

É fantástico quando, em meio às informações de que dispomos e de um enigma a ser solucionado, encontramos uma ordenação para um resultado!

Um jogador de videogame faz isso muito bem, cada vez mais motivado, não descansando enquanto não solucionar a questão apresentada pelo jogo virtual. E, ao nos depararmos com um problema, um enigma que nos intriga, logo tentamos recorrer à nossa memória para transpor alguma familiaridade e encontrar uma possível solução.

Agora examine as frases a seguir, que envolvem fenômenos físicos:

"Olhar para o céu noturno é o mesmo que assistir a um filme antigo, onde os atores já não estão mais vivos".

"A luz do Sol demora oito minutos para atingir nossos olhos".

"O Arco-íris tem sete cores que fazem parte do espectro eletromagnético visível".

"Aproxime a bússola de um fio percorrido por corrente elétrica e observe o ponteiro".

"Observe como o móvel desce mais devagar, mostrando a influência da força de atrito no movimento".

"A luz ao passar pelas duas fendas projeta essas faixas brilhantes alternadas com escuras, como vocês podem ver neste anteparo" (informações verbais) ⁴;

As frases anteriores foram proferidas por professores de Física, em meio às suas aulas em uma escola regular de Ensino Médio. Cada uma delas envolve conceitos que

⁴ Frases proferidas pelo professor de física durante suas aulas.

costumam atrair a atenção dos alunos. E, muitas vezes, fizeram parte de aulas práticas, enquanto os alunos realizavam um experimento. Nada teriam de mais se, entre os alunos, não estivessem presentes pessoas com deficiência visual.

Neste capítulo, trataremos sobre dois aspectos que se interligam: resolução de problemas e deficiência visual. Discutiremos propostas para todos os alunos de forma igualitária, sejam estes videntes⁵ ou deficientes visuais, a fim de mostrar que a integração social é uma das saídas para melhorar o ensino dos deficientes visuais⁶; "afinal, ciências não é só para os videntes!"

Na segunda parte, apresentaremos uma proposta, que envolve a *Problem Based Lear-*

⁵ Pessoas que possuem a capacidade de enxergar por meio dos órgãos visuais.

⁶ Essa pesquisa, já finalizada, acompanhou como se desenvolvia o ensino de Física para estudantes cegos sem uma escola da região de Santo André/SP.

ning (PBL), implementada no final dos cursos do Ensino Médio (EM), na forma de propostas de Trabalho de Conclusão de Curso (TCCs), como uma estratégia investigativa de ensino que integra os alunos e promove o aprendizado⁷ a todos e de forma igualitária.

Então, vamos à primeira parte!

5.1 Como motivar alunos cegos a aprenderem ciências – o caso da Física

Nessa parte do nosso capítulo, propomos a uma reflexão acerca do ensino para deficientes visuais.

Se você está sendo capaz de ler esse texto, é com você mesmo que pretendemos conversar. Todavia, muitos não poderão estabelecer uma comunicação conosco, através dele, por não poderem enxergar ou perceber as letras que aqui escrevemos. E isso é algo sério!

⁷ A proposta refere-se a uma pesquisa de ensino de física, que atualmente está sendo desenvolvida em nosso Programa de Pós-Graduação em Ensino e História das Ciências e Matemática.

Para garantir a escolarização brasileira, existem leis e documentos públicos que são a base de uma educação de qualidade a todos, buscando sempre o desenvolvimento humano e social das crianças e dos jovens, que possuem isso como direito. Porém, acreditamos que nem todos têm esses direitos garantidos, pois as práticas pedagógicas de ensino-aprendizagem, principalmente nas escolas regulares, com estudantes que necessitam de educação especial ainda são inadequadas, como discutiremos a seguir.



Figura 1 – Compartilhando Saberes Fonte: Compartilhando Saberes (2015).

A educação especial é uma modalidade de educação escolar, oferecida preferencialmente na rede regular de ensino, para educandos com necessidades especiais. Sendo assim, o ensino de alunos com Deficiência Visual (DV) se enquadra na educação especial.

As pessoas com deficiência visual podem se dividir em dois grupos: indivíduos cegos, que são aqueles que perdem totalmente a visão (incluindo a perda da percepção luminosa); indivíduos com baixa visão, os quais possuem parcialmente a visão e necessitam de instrumentos ópticos para enxergar.

Os indivíduos cegos podem ter adquirido a cegueira de forma congênita – ou seja, desde o nascimento – ou, ainda, durante a vida; mas, em ambos os casos, os indivíduos exploram os sentidos remanescentes, olfato, tato, paladar e audição, para poderem comunicar-se, interpretar e assimilar informações. Portanto, é de grande importância a adaptação de materiais e que haja professores

qualificados para ensinar tais alunos, de forma que estes compreendam os fenômenos e ampliem seu conhecimento, assim como ocorre com os demais estudantes.

Segundo as leis brasileiras, (BRASIL, Ministério da Educação e Cultura 1996 e 2007) a educação inclusiva deve ser oferecida preferencialmente nas escolas regulares, que devem promover uma formação voltada ao cotidiano dos alunos, com visão de mundo e com compreensão da dinâmica do universo, para todos. Mediante essa garantia, esse tipo de educação tem por objetivo aumentar a participação de todos os alunos no ambiente escolar, proporcionando-lhes uma maior igualdade de possibilidades e de direitos.

A educação inclusiva apoia os deficientes, de forma a garantir o acesso de todos os alunos a um sistema educacional de qualidade; consequentemente, visa a dar o apoio educacional necessário para a participação desses alunos nos processos educativos de aprendizagem.

No entanto, para que todos os alunos cegos tenham garantido o seu acesso pleno à educação, o processo da inclusão deve ser praticado com o objetivo de lhes proporcionar a realização dos seus objetivos, especialmente para que o ensino seja livre de projeções inalcançáveis. Dessa forma, será permitido que o aluno desenvolva sua criatividade sem a intenção de "aprender para ter uma função", e sim pelo simples fato de que "aprender é algo agradável e prazeroso".

É importante ressaltarmos que a educação inclusiva tem como foco o indivíduo e o desenvolvimento pleno das suas potencialidades humanas. Ela objetiva a melhoria da qualidade de vida e do conhecimento do aluno, promove a participação plena em sociedade e volta-se à superação de suas necessidades especiais. O desejo é de acesso irrestrito, para que o aluno possa participar dos processos educacionais perante a sua capacidade de aprender e não apenas como um ambiente para se frequentar.



Figura 2 – Braile Fonte: Acre (2015).

Mesmo existindo as leis que regem o ensino inclusivo, não se tem conhecimento acerca de muitas práticas pedagógicas de ensino-aprendizagem com estudantes que possuam alguma deficiência visual. Observase um problema entre o que foi proclamado, ou seja, a transformação da sociedade, para a ampliação e participação de todos os estudantes nos estabelecimentos de ensino regular e as práticas desenvolvidas nas escolas. Como podemos perceber, em muitos casos, em nossas escolas os estudantes com necessidades especiais foram simplesmente incluídos em classes regulares sem nenhuma adaptação.

Um problema ainda mais preocupante é a falta de práticas pedagógicas inclusivas, cujos principais responsáveis são: falta de material adequado e adaptado; falta de ambientes com professores especializados e, também, pelo despreparo dos professores, em sua formação inicial, para trabalhar com esses estudantes. Esse aspecto é identificado como o principal empecilho para a evolução dos DV; por consequência, torna-se um obstáculo às práticas inclusivas de ensino e aprendizagem que envolvam a socialização dessas pessoas e os demais alunos.

Mais especificamente, os professores ainda não recebem uma formação adequada para ensinar os alunos com necessidades especiais; e, evidentemente, saem da graduação sem saber trabalhar com alunos cegos. Ademais, a maioria desses profissionais em exercício não possui formação específica na área da educação inclusiva. Então, para promover melhorias na sua didática, os professores

deveriam utilizar métodos, instrumentos de ensino e de avaliação adequados à realidade dos alunos com DV, para que, assim, estes pudessem atingir melhores condições de vida.

Como você deve imaginar, a capacidade de aprendizagem dos estudantes cegos é igual à dos estudantes videntes. Entretanto, os deficientes visuais necessitam superar as barreiras da deficiência com abordagens especiais para conseguirem alcançar os objetivos da aprendizagem, tendo acesso, por exemplo, a:

- i. recursos adequados à falta de visão, ou seja, material adaptado;
- ii. professores preparados para lidar com a situação – com competências e habilidades para desenvolver estratégias e metodologias de ensino adequados.

Para que os profissionais da educação desenvolvam essas habilidades mencionadas e aprimorem possíveis carências da formação inicial, é necessário que participem de cursos de formação continuada. Além disso, para

cada uma das disciplinas curriculares (Física, Química, Biologia etc.), existem especificidades distintas, as quais devem ser tratadas e desenvolvidas nesse processo.

No entanto, estudos indicam que o ensino de Física para pessoas com necessidades especiais ainda é incipiente e pouco explorado.

Enquanto isso, em uma sala de aula de Física de uma escola regular um aluno pergunta ao professor, de forma intrigada: " – *Professora, viu que entrou um aluno cego em nossa turma?* Como vai ensinar óptica pra ele?".

Por trás da dúvida do aluno, encontra-se uma enorme perspectiva de reflexão. Realmente surge um desafio ao professor sem formação apropriada.

De nada adiantaria, nessa sala de aula, utilizar a seguinte frase, muitas vezes escrita no quadro negro: "O *Arco-íris tem sete cores, que fazem parte do espectro eletromagnético visível*".

Frente a essa frase, proferida pelo professor ao mesmo tempo em que apresenta o quadro das ondas eletromagnéticas, como poderia o aluno com DV compreender e construir algum conhecimento?

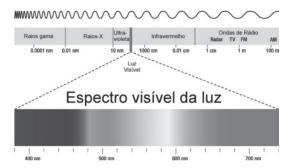


Figura 3 – Espectro Fonte: (CARVALHO, 2016)

Na medida em que o professor capacita-se para desenvolver ações e experiências pedagógicas em prol do ensino inclusivo, estará, também, possibilitando o desenvolvimento da autonomia dos alunos com DV. Então, se os alunos videntes podem ter dificuldades em aprender determinados conceitos físicos, como seria para os deficientes visuais, sem ao menos um material adaptado?

No entanto, para desenvolver essa ideia, é necessário conhecer sobre a acessibilidade. Os recursos de acessibilidade favoreceram a aprendizagem de alunos com necessidades especiais, pois ajudam a eliminar algumas barreiras que dificultam a aprendizagem desses alunos com deficiência visual, barreiras essas que são externas a suas deficiências (má formação do professor e falta de materiais adaptados).

Portanto, o conhecimento de recursos inclusivos e de práticas que valorizem as individualidades de cada aluno colabora com a acessibilidade e aprendizagem de todos.

Mas o que significa acessibilidade? Ela é definida, pela Associação Brasileira de Normas Técnicas NBR 950, como:

> [...] a condição para utilização com segurança e autonomia, total ou assistida, dos espaços mobiliários e equipamentos urbanos, das edificações, dos

serviços de transporte e dos dispositivos, sistemas e meios de comunicação e informação por uma pessoa com deficiência ou com mobilidade reduzida.(2004)



Figura 4 – Adaptação de piso para deficientes visuais Fonte: (HAGA, 2016)

A figura a seguir apresenta um material desenvolvido para o ensino de óptica que incluiria os alunos deficientes visuais, com a possibilidade da construção do conhecimento acerca de fenômenos ópticos que envolvem as lentes convergentes e divergentes.

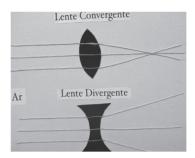


Figura 5 – Tipos de Lentes Fonte: (MORENO, 2013).

Segundo Ana Carolina Moreno (2013), a coleta de dados da pesquisa do professor foi feita durante um ano, contando com a participação de estudantes de licenciatura e alunos videntes e cegos.

Veja que, na figura a seguir, surge uma proposta para o ensino da difração da luz por um prisma. Barbantes de espessuras distintas representam cada uma das frequências que constituem a luz branca (começando pela cor vermelha, logo acima, a qual é seguida pelas demais – laranja, amarela etc.).

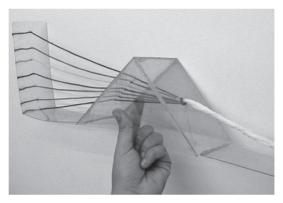


Figura 6 – Decomposição da luz em 3D Fonte: (MORENO, 2013).

"Com pedaços de plástico e diferentes tipos de barbante, é possível criar modelos táteis para ensinar conceitos de óptica, explicou o professor Eder Camargo, da Unesp" (MORENO, 2013, [s. p.]).

Todavia, ao construir esses materiais, é preciso existir certa vigilância didática, pois alguns aspectos podem passar despercebidos e, ainda, tornarem-se um obstáculo para que o aluno com DV não compreenda os fenômenos e, devido a isso, não desenvolva sua autonomia.

Para citar um exemplo, durante uma oficina para formação de professores no ensino inclusivo da nossa universidade (SALMAZO; RODRIGUES, 2013)⁸, um dos participantes desenvolveu o gráfico a seguir, procurando solucionar um problema envolvendo Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV). Tratava-se de uma proposta de criação, com materiais adaptados, por meio da qual é possível, pelo tato, sentir: os eixos, as diferentes velocidades, o eixo (y) e as diversas unidades de tempo (x) etc.

⁸ Trabalho apresentado no XXXI Encontro de Físicos do Norte e Nordeste, em Campina Grande, no ano de 2013, intitulado "Ampliando os conhecimentos de futuros professores no ensino de Física para cegos".

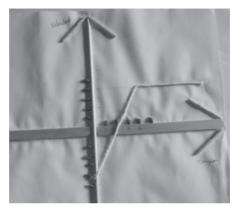


Figura 7 – MRUV em Relevo Fonte: (SALMAZO & RODRIGUES, 2013).

Você conseguiria identificar alguns obstáculos na apresentação desse gráfico (Figura 7) que impediriam que o aluno com DV, utilizando o tato, encontrasse qual é o eixo do tempo? E o da velocidade?

Repare que a palavra "velocidade" foi escrita a lápis, o mesmo para "tempo". Assim, concluímos que o aluno não conseguirá, por si só, saber quais dos eixos corresponderia à

velocidade e ao tempo. Da mesma forma, não existe uma linha em alto relevo, que acompanhe a linha do gráfico até o valor correspondente da "velocidade" e do "tempo" nos respectivos eixos. Isso comprometeria, por parte do aluno com DV, a compreensão do gráfico de forma autônoma.

Verificamos, então, que é necessário desenvolver materiais potentes, que realmente auxiliem os alunos com DV a compreenderem os conceitos físicos. Podemos imaginar que de nada adiantará ao professor desenhar no quadro, com giz, em uma sala onde existam alunos com DV, esse gráfico (Figura 7), e dizer aos alunos: "– Observem a resolução do problema!".

Por outro lado, todos os alunos podem ter dificuldades em aprender determinados conceitos de Física, por não conseguirem relacionar o conceito aprendido com acontecimentos do dia a dia, assim não conseguem interpretar o conceito como parte de um fenômeno físico. Em alunos deficientes visuais essa adversidade pode ser ainda mais grave, pela impossibilidade de identificação com clareza de alguns fenômenos físicos. Ou seja, devido a suas limitações, os cegos podem não possuir conhecimento acerca do fenômeno físico, como o entendimento de cores etc. Afinal, conforme disse Rubem Alves (1985, p. 29): "Só nos entregamos a problemas que julgamos poder resolver com recursos de que dispomos".

Então, como esperar que um aluno com DV se entregue à resolução de um problema sem materiais adaptados?

Os professores possuem a obrigação de alterarem suas práticas pedagógicas para obter uma equiparação de oportunidade entre os alunos. Assim, a elaboração de atividades potentes que incluam alunos cegos e videntes na mesma aula possibilita o pensamento inclusivo para todos.

Uma maneira de realizar a inclusão é o professor assumir o papel de mediador das atividades de aprendizagem, pois interliga os conceitos a serem aprendidos com as necessidades dos alunos. Logo, o "professor mediador" prepara um ambiente de aprendizagem para todos os alunos, e colabora para a equiparação de oportunidades entre videntes e cegos.

Dessa maneira, percebemos que a igualdade de oportunidades entre os alunos videntes e cegos está interligada à forma de interação entre os alunos, que pode ocorrer em trocas de ideias em aulas laboratoriais, que utilizam um método de ensino diferente do praticado em suas aulas expositivas. É possível, assim, estabelecer uma socialização inclusiva entre os alunos videntes e cegos, proporcionando a todos os alunos um ensino equitativo de oportunidades e promovendo a autonomia de todos.

Os alunos geralmente demonstram um interesse maior pela aula laboratorial, participando de forma mais ativa da experimentação, questionando tanto o professor quanto os demais alunos sobre o tema proposto. Nesse contexto, articula-se assim uma troca de conhecimentos e conceitos sobre o conteúdo entre alunos cegos e videntes, sendo construídos novos conhecimentos a partir de uma mudança de postura do professor. Porém, não basta indicar uma má formação do professor como o principal obstáculo no ensino equitativo dos alunos, nem destacar os problemas em sua didática, quando ocorrem problemas que fogem da sua responsabilidade: carência de professores especialistas (que ofertam atendimento educacional especializado aos alunos com necessidades especiais), falta de material adaptado (por exemplo, soroban e calculadoras falantes) e ausência de cursos de formação continuada nas escolas.

Possíveis soluções para os problemas citados seriam a presença de professores especialistas que colaborem, visando a uma melhor formação sobre o ensino inclusivo para os demais profissionais, pois, dessa maneira, poder-se-iam propagar conhecimentos para os colegas de trabalho e, também, adaptar possíveis materiais para os alunos com DV.

E, repensando sua prática, os professores poderão assumir o papel de mediadores e facilitadores do desenvolvimento da aprendizagem de seus alunos, estabelecendo a equiparação de oportunidades entre estes. Em virtude disso, os professores serão os incentivadores e estruturadores das atividades de aprendizagem e de ensino, desde que a comunidade escolar também os incentivem e ofereçam condições materiais e apoio para o trabalho.

A seguir, apresentaremos duas propostas de práticas de ensino diferenciadas, que aconteceram realmente em uma escola regular, onde estudam alunos com DV e videntes. São propostas de atividades laboratoriais investigativas, ou seja, é apresentado um problema aos alunos e todos devem levantar hipóteses e testá-las, de forma a solucioná-lo. É importante lembrarmos de que essas são atividades que integram os participantes socialmente.

Então: "como é possível mostrar ao aluno com DV, assim como aos demais, as diferentes velocidades com as quais um objeto desce uma rampa, considerando diferentes atritos?"

Veremos isso mais adiante!

5.1.1 A necessidade de uma prática para inovar o ensino de alunos com DV

Mediante a perspectiva do ensino inclusivo, desenvolvemos uma investigação que teve início em 2009, em uma escola estadual da região de Santo André onde notamos uma oferta desigual de oportunidades de aprendizagem entre os alunos videntes e cegos. Os alunos com DV não estavam recebendo as

mesmas oportunidades de aprendizagem dos alunos videntes, devido à falta de materiais adaptados as suas necessidades especiais.

Observamos aulas de Física (expositivas e experimentais), nessa escola, durante um determinado período, para verificarmos se as práticas pedagógicas ainda supervalorizam a visão e se os deficientes visuais não recebem as mesmas oportunidades de aprendizagem dos alunos videntes.

A escola é estadual, e fica na cidade de Santo André/SP. Possui uma sala multifuncional, com uma professora especialista que atende os alunos em contra turno, trabalhando com o Atendimento Educacional Especializado (AEE)⁹, sendo uma "escola polo para DV".

Durante as observações de aulas expositivas, analisamos as formas como os professores articulam em suas aulas e como trabalham em uma turma com alunos com

⁹ Mais informações em: Brasil, 2007.

DV. Além disso, pudemos verificar quais métodos são utilizados pelos professores para atender às particularidades de cada aluno, ou seja, averiguamos quais estratégias os professores utilizam para equiparar as oportunidades dos alunos cegos e videntes.

Entretanto, percebemos que a comunicação entre os alunos com DV e o professor apresenta falhas que comprometem a aprendizagem e o desenvolvimento do aluno com necessidades especiais. Para se ter uma ideia, observamos que, em algumas situações, as descrições de desenhos, gráficos e representações não eram realizadas ou eram precárias para que o aluno com DV pudesse compreender o conceito envolvido, tal como já mostramos na primeira parte deste capítulo.

Outra observação importante é que a maneira como professor lida com os alunos com DV demonstra uma diferenciação em relação aos demais, fazendo com que não recebam as mesmas informações. E, quando se trata de avaliação, são também avaliados de forma facilitadora, não sendo promovida a superação de obstáculos da aprendizagem. Isso se confirma quando, em entrevista, o professor comenta como o aluno com DV realizou a apresentação de um trabalho. Enquanto os alunos videntes apresentaram seus trabalhos oralmente a todas da sala, os com DV o fizeram individualmente apenas para o professor, em uma proposta visivelmente facilitadora

Quando questionado sobre a razão dessa estratégia de avaliação diferenciada, o professor justificou ser um meio facilitador: "Mas... Pedi para apresentar para mim. Não foi para a sala toda como os outros".

Os alunos videntes apresentaram o trabalho para a sala, porém o com DV sofreu segregação ao apresentar somente para a professora.

Outro tratamento diferenciado entre os alunos são as determinações de lugares

particulares na sala de aula para os com DV, sempre na primeira carteira de frente para o professor. Apesar de ser um facilitador do contato desses alunos com o professor, essa atitude não permite que o aluno tenha liberdade para se sentar nos demais lugares da classe – diferentemente dos demais alunos, que possuem livre arbítrio para sentarem-se onde desejarem.



Figura 8 – Alunos em aula expositiva Fonte: (SALMAZO, 2015).

Observando as atitudes na referida escola, percebemos uma divisão entre os alunos. E essa cisão é algo que não favorece a troca de informações entre os alunos, prejudicando a aprendizagem de todos. Isso porque o desenvolvimento mental de uma pessoa DV está ligado com as relações sociais que ela mantém em seu cotidiano. Logo, diversos conceitos ganham significação apenas quando são expostos de forma social, algo que não observamos nas aulas expositivas.

5.1.2 Uma proposta diferenciada para integrar todos os alunos: deficientes visuais e videntes

A proposta era uma atividade experimental investigativa, envolvendo o ensino de Mecânica. Com a concordância e a autorização dos participantes, todos os videntes, inclusive o professor, usaram uma venda nos olhos, para atuarem junto aos deficientes visuais na atividade experimental investigativa no espaço laboratorial. O objetivo era tentar

coletar informações sobre reflexões junto aos alunos com DV. Diferentemente, nas aulas experimentais notamos uma interação distinta entre os alunos, pois a percepção dos experimentos ocorreu principalmente pelo tato, já que os alunos videntes permaneceram vendados, desde a sala de aula até o laboratório, e durante o experimento.



Figura 9 - Alunos se locomovendo com os olhos vendados Fonte: (SALMAZO, 2015).

Durante a implementação desses experimentos, tornamos a interação entre os alunos algo distinto das demais observações em aulas expositivas, podendo notar como ocorria a colaboração nas trocas de informações entre videntes e DV em várias atividades na escola.

O aluno com DV que participou da atividade comentou:

"Os demais alunos sentiram na pele as nossas dificuldades, pois um amigo comentou que parecia um abismo a escada e antes das atividades não tinha muita conversa, agora o pessoal ta respeitando e conversando mais com a gente."

Já no laboratório, durante o experimento, todos os alunos ocupavam posições igualitárias em torno da bancada. Pudemos observar que os alunos cegos foram questionados diversas vezes pelos alunos videntes. Outro aspecto interessante foi que a todo instante os alunos com DV tinham de ajudar seus colegas, pois, ao estarem experimentando a falta de visão, os videntes sentiram muitas dificuldades para interpretar o que acontecia na bancada



Figura 10 – Montagem do experimento no Laboratório Fonte: (SALMAZO, 2015).

Os alunos entendiam o experimento ao tocá-lo e ao escutá-lo, ou seja, o professor não ficou preso ao giz e à lousa, materiais ao quais alunos com DV não possuem pleno acesso. O experimento representava diferentes forças de atrito em uma superfície inclinada. Os alunos tinham de deslizar um cubo, que possuía diferentes valores de coeficiente de atrito em suas superfícies (superfície lisa ou com lixa ou

vazada etc.) e analisar os diferentes ângulos que cada superfície necessitava para que o corpo iniciasse o movimento, deslizando pela rampa.

Ao propor esse experimento, o professor utilizou uma estratégia diferenciada para ensinar o conteúdo aos seus alunos, atitude que mostra um reconhecimento da necessidade e da importância da transformação da prática pedagógica. Essa proposta promove o ensino mais inclusivo, atingindo todas as necessidades especiais dos alunos, inclusive possibilitando uma reflexão, por parte dos alunos videntes (que muitas vezes não reconhecem a dificuldade do colega cego) também nas situações de aprendizagem.

A falta de reconhecimento dos alunos videntes fora identificada quando não colaboraram como deveriam durante as atividades em sala de aula. Todavia, a partir da atividade experimental proposta – ocasião em que os alunos videntes participaram de olhos vendados –, essa colaboração teve nítida mudança.

Pudemos notar essa alteração na conduta quando foi realizada a entrevista com um dos alunos com DV: "Os colegas sentiram na pele o que a gente passa aqui dentro. Não só aqui dentro mas lá fora também. Então, estão ajudando mais, não estão fazendo tanto barulho na hora que a gente quer ficar quieto para escutar a explicação".

Verificamos que nessa escola, apesar de possuir um diferencial no que se refere ao atendimento inclusivo ao aluno com DV em relação às demais escolas estaduais, ainda havia obstáculos na equiparação de oportunidades entre cegos e videntes.

Entre os diferenciais, encontram-se a sala de recursos equipada com diversos materiais adaptados; uma professora especialista que ajuda a conscientizar os demais alunos a colaborarem com os que têm DV, além de possuir uma professora especialista com uma formação adequada para trabalhar com a inclusão destes alunos.

Todavia, identificamos que um dos principais obstáculos na aprendizagem dos DV fora a má formação dos professores, tanto a inicial quanto a continuada, sobre a inclusão. Dessa forma, os professores acabam tendo atitudes que não auxiliam no desenvolvimento da autonomia dos alunos com DV, nem a superar seus limites, salvo a exceção dada à professora especialista presente na escola.

Cabe citarmos a afirmação de um professor, em entrevista na escola observada, o qual declara que facilita a obtenção de nota por parte do aluno com DV:

> "Nas avaliações, eu tenho um olhar diferenciado, porque a direção e a coordenação sempre instruem que temos de ter um olhar diferenciado por causa da inclusão".

Pensando sobre essa formação, uma saída seria o governo propiciar cursos formativos para que os professores pudessem refletir sobre suas práticas e inserir inovações nas atividades aos alunos com DV. Todavia, em entrevista, o professor de Física nos disse os cursos são pouco atrativos e demoram para ser ofertados: "A DE (Diretoria de Ensino) dá as coisas, mas demora. Parece que fica para a última instância".

Notamos, assim, que o auxílio e os cursos oferecidos pela DE não são imediatos e de rápida realização. Em virtude disso, consideramos relevante a formação continuada dos professores e gestores da escola, para que eles possam compreender melhor como utilizar as práticas pedagógicas inclusivas. Acreditamos que essa formação deva ocorrer dentro e fora da DE, ou seja, os cursos oferecidos pelo Governo do Estado não devem contemplar a totalidade da formação continuada, sendo necessário buscar horizontes mais amplos e significativos.

Além disso, para que os cursos oferecidos possam ser potencialmente motivadores aos professores, dever-se-iam buscar, de antemão, as concepções de ensino e aprendizagem destes profissionais, de forma a promover mudanças por meio da reflexão sobre a prática.

A partir desses levantamentos, para tornar viável o uso de experimentos no ensino de Física, e nas demais disciplinas, é fundamental que os profissionais da educação revejam as suas concepções sobre as práticas utilizadas no ensino de alunos com DV, para que todos os estudantes tenham condições de ser autônomos.

Para finalizarmos esta parte do capítulo, apresentamos uma reflexão sobre o ensino de Física aos DV e das diferentes estratégias para promover melhoria no ensino e no desenvolvimento da autonomia dos alunos videntes e deficientes visuais. Como pudemos verificar, uma das formas apresentadas foi o incentivo às práticas de trabalho que integrem os alunos em sua totalidade, tal como o experimento investigativo mencionado.

A seguir, apresentaremos outra proposta inovadora, que também possibilita a integração entre alunos para a solução de um problema (PBL) entre os alunos do EM.

5.2 A prática de ensino através dos Trabalhos de Conclusão de Curso com alunos do Ensino Médio

Para uma aprendizagem inclusiva e integradora, é fundamental dar "voz e ouvidos" aos alunos; afinal, a oportunidade de participarem ativamente do seu processo educativo pode auxiliá-los a identificar e a explorar suas capacidades. Sabemos que a escola já não é mais a fonte única e privilegiada de aprendizagem. Os alunos possuem conhecimentos prévios, adquiridos em circunstâncias diversas, que devem ser considerados no processo de ensino.

Por outro lado, considerando casos específicos, esses conhecimentos prévios e o engajamento à própria aprendizagem não se articulam de maneira espontânea. É nesse

momento que o papel da escola e do professor se torna fundamental, pois visa à seleção e sistematização das informações, à mediação e estruturação de discussões para produzir conhecimento junto aos alunos.

Relataremos um caso, em que um grupo de quatro professores do Ensino Médio desenvolveram, junto aos seus alunos, uma atividade conhecida por Trabalho de Conclusão de Curso. Essa atividade usualmente é realizada ao final de cursos de graduação, sempre envolvendo o formato de investigação e pesquisa. Todavia, por se tratar de uma atividade que desenvolve o espírito científico, teve ampla aceitação no EM, incentivando os alunos a desenvolverem a alfabetização científica.

Essa atividade sistematizava e impulsionava a aprendizagem ativa dos alunos, assumindo características de uma auto-aprendizagem, na qual os estudantes determinavam seus objetivos, orientados pelos professores. Essas características são semelhantes àquelas identificadas em diversos outros casos de Aprendizagem Baseada em Problemas¹⁰, as quais elencamos:

- i. os alunos se conscientizavam do que já sabiam e do que precisariam para realizar a tarefa;
- ii. estímulo à pesquisa individual e em grupo de alunos;
- iii. sistematização do conhecimento mediada pelos professores, como fonte de saber e de regulação da aprendizagem;
- iv. reflexão particular e compartilhada dos alunos sobre as tarefas desenvolvidas.

Vejamos, agora, como essas características apareciam no trabalho!

A atividade envolvia temas das áreas de Matemática, Física, Língua Portuguesa e Informática, integrados por um cenário potencialmente real que os alunos deveriam

¹⁰ Ver Edmundo Escrivão Filho e Luís Roberto de Camargo Ribeiro, 2009.

analisar e investigar e, por fim, propor resolução dos problemas durante seu percurso na 3ª série. Esse processo foi acompanhado pelos professores.

Ao final do ano, os estudantes deveriam entregar aos professores uma monografia, envolvendo um texto de caráter científico, produzida em colaboração. Também fazia parte do trabalho uma apresentação oral, para a divulgação do trabalho aos colegas. Tanto a monografia quanto a apresentação deveriam expressar o percurso traçado até a resolução de cada um dos problemas. Daí a origem no nome Trabalho de Conclusão de Curso para a atividade.

Desse modo, percebemos que essa atividade representou uma possibilidade em que não se separava o fazer científico – isto é, a maneira como um cientista atua – do ensinar e aprender ciência, pois coloca aluno e professor do Ensino Médio percorrendo os caminhos da ciência durante a construção de

seus conhecimentos. Para o início do trabalho, os professores elaboraram situações com descrições de problemas abertos que poderiam ser ampliados, diminuídos e adaptados pelos alunos.

Essa flexibilidade de ampliação ou contenção do problema favorecia que os próprios alunos determinassem e focalizassem tópicos de investigação que lhes chamassem maior atenção. Por exemplo: dois grupos de alunos de salas diferentes escolheram um mesmo cenário, cujo assunto principal seria Segurança da Informação. Poderíamos esperar que os trabalhos, os textos e as resoluções dos problemas fossem as mesmas para os dois grupos. Um grupo, porém, decidiu enfatizar, como tópico investigativo, os impactos sociais da Segurança da Informação; enquanto o outro optou por investigar tópicos de tecnologias que auxiliariam a segurança em computadores. Diante de problemas abertos, isto é, que podem ser imaginados e

contextualizados pelos alunos e mediados pelos professores, raramente um TCC teria resolução de problemas idêntica entre os grupos de alunos.

Citando um exemplo ainda mais concreto, relatamos outro cenário em que se descrevia o ambiente de uma *Organização Não Governamental* (ONG), para a qual os estudantes deveriam se organizar em grupos, a fim de propor melhorias nos serviços oferecidos por ela. Sintetizamos esse cenário no seguinte trecho:

"Uma Organização Não Governamental oferece serviços de inclusão digital à comunidade, tais como aulas de informática e disponibilização de computadores com acesso à internet e impressão. Porém, esta ONG encontra-se com sérios problemas em seu setor de Tecnologia da Informação. Não existem computadores adequados à sua operação, pois estão obsoletos; não existem sistemas de informação que cadastrem e auxiliem os usuários; nem sempre a

internet funciona. Também não há muitos recursos financeiros para corrigir estas dificuldades citadas".

Os grupos de alunos recebiam uma proposta de trabalho que descrevia o cenário a resolver. Nessa fase, eram estimulados pelos professores a identificarem as dificuldades de operação cotidiana da ONG, para posteriormente pensarem possibilidades de investigação e de atuação.

A seguir, elencamos dois dos principais problemas identificados pelos alunos:

- a. existência de equipamentos inadequados à operação da ONG;
- b. não há sistemas de informação, como softwares, que auxiliem a inclusão digital da comunidade da ONG.

Nessa etapa de levantamento dos problemas, os professores mediavam discussões em aula com os alunos, mediante perguntas norteadoras, para mobilizar os conhecimentos que os estudantes já possuíam e para identificar os conhecimentos que ainda deveriam ser elaborados para solucionar o problema. Por exemplo, algumas perguntas norteadoras eram: "o que será que é importante para se promover a inclusão digital?", ou ainda "quais softwares existem, ou quais já usamos aqui na escola ou fora dela, para aprendermos algo?", dentre outras.

Os alunos, então, incomodados pelos problemas a serem solucionados e pelas perguntas norteadoras, realizavam buscas na internet, geralmente consultando artigos científicos, para tentar melhor compreender a situação a ser investigada. Essas buscas traziam novas discussões à sala de aula, e um passo seguinte era mediar a construção de uma pergunta de pesquisa a ser feita pelos grupos.

Citamos a seguir, uma das perguntas de pesquisa elaboradas pelos alunos: "Quais seriam as alternativas de resolução dos problemas, se há escassez de recursos financeiros para a ONG?".

Após um levantamento inicial dos problemas, os estudantes eram encorajados a definir o escopo de pesquisa de seus grupos. Esse escopo definia o tema a ser pesquisado e solucionado pelo grupo. Temas como tecnologias sustentáveis, otimização de recursos, aperfeiçoamento de captação financeira foram os que emergiram das discussões iniciais dos estudantes com os professores.

Uma vez delineado o escopo das pesquisas, alguns tópicos investigativos eram tomados pelos alunos. A seguir, conheça alguns desses tópicos:

- a. viabilidade de uso de *softwares* livres nas proposições de soluções;
- b. reutilização de computadores para aulas de manutenção de máquinas à comunidade da ONG;
- c. descarte correto de resíduos eletrônicos;
- d. interferência eletromagnética no cabeamento de dados;
- e. ideias para captação de recursos financeiros para ONG;

Como vemos, o cenário possibilitava a identificação, por parte dos alunos, de tópicos que puderam ser apoiados por disciplinas como a Computação e a Física. Também na construção do texto dos alunos, que era de gênero científico, a matéria de Língua Portuguesa teve papel fundamental. Já na disciplina de Matemática, foi possível lançar mão, por exemplo, das aulas de Geometria para que os alunos abstraíssem um cenário mais real e significativo, ao proporem layouts e desenhos com medidas do prédio, salas e departamentos da ONG, cuja tarefa culminou na montagem e na apresentação de maquetes do cenário pelos alunos.

Os métodos de resolução de problemas eram variados entre os grupos de alunos. Algumas equipes se dispuseram a fazer visitas de campo, para conhecer melhor o cotidiano de uma ONG real e, assim, agregar informações e experiências. Outras optaram pelo

levantamento bibliográfico como método, para pesquisar tópicos específicos, caso das buscas sobre *software* livre.

Como era permitido imaginar os desdobramentos das situações-problema a partir de seus conhecimentos prévios e traçar objetivos de aprendizagem para elaborar soluções, os estudantes engajavam-se no projeto, gerando popularidade do trabalho pela escola. Isso não acontecia sem a trivial mediação dos professores envolvidos.

As aulas desses professores, quando abordavam o projeto, aumentava o engajamento dos alunos. Expliquemos: não havia "receita pronta" para dar aos alunos, nem os alunos tinham questões prontas; assim, estas emergiam da discussão que o professor promovia e mediava em sala de aula. Essas discussões orientavam novas buscas semanais extraclasse a serem realizadas pelos

estudantes, que retornavam com novos resultados e questionamentos à escola.

Os professores estavam diante de oportunidades únicas, pois vivenciavam momentos de abertura dos alunos à aprendizagem, cada grupo com seus questionamentos.

As aulas de laboratório promoviam espaços adequados para o trabalho, onde os alunos poderiam discutir sobre o trabalho e pesquisar livremente em *sites* na internet. Os professores criaram uma página de internet na rede social *Facebook* para orientar o projeto. E esses recursos pareciam aumentar a sensação de liberdade e engajamento dos aprendizes.

A seguir, apresentamos uma figura que sintetiza o processo do referido Trabalho de Conclusão de Curso:

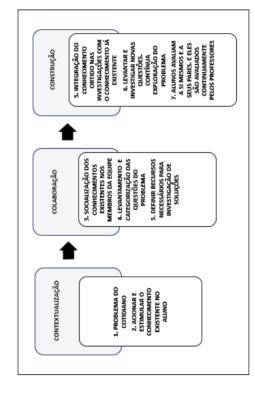


Figura 11 – Processo de elaboração dos TCCs com PBL Fonte: Almeida (2016)

Promoveu-se, ao final das apresentações finais das soluções de problemas, um debate no auditório da escola, que deu voz a alunos e professores, fazendo-os refletirem sobre o desafio e as conquistas com o projeto. O resultado geral das atividades dos TCCs, no final do ano letivo, deixou claro aos alunos e aos professores que o conhecimento foi construído em colaboração ao longo do ano.

Não foi fácil aos professores, por outro lado, sustentar o trabalho. Eles se deparavam com diversos desafios, por exemplo: Como avaliar com métodos tradicionais – como provas e exercícios – as tarefas dos alunos?; O conhecimento produzido pelos grupos tinha caráter mais generalista, como preparar os alunos para lidarem com questões específicas como aquelas dos vestibulares, por exemplo?; Como poderiam lidar com a ansiedade dos grupos que consideravam a apresentação do final do ano como um "juízo final"?

Elencamos, a seguir, algumas estratégias elaboradas pelo grupo docente, quando este tentou responder às seguintes questões:

- agendamento de pré-apresentações dos trabalhos, a cada dois meses, em média, com a finalidade de avaliar continuamente os TCCs e sugerir melhorias. Isso fazia com que os alunos focassem na aprendizagem do dia a dia, e que a apresentação final seria uma síntese desse processo;
- ii. relatórios de autoavaliação dos alunos, por meio do qual cada aluno poderia refletir sobre o que aprendeu em um período, e o que poderia aprender nas etapas seguintes.

Essas estratégias surtiriam efeito. Contudo, cabe indagarmos como se sentiriam os professores diante de uma abordagem de ensino inovadora, isto é, não tradicional? Saberiam dar respostas prontas a tudo e a todos?

A estas colocações, percebíamos professores em situação de conflito e incertezas. Era necessário que os professores também aprendessem e se formassem enquanto ensinavam seus alunos. Logo, a reflexão conjunta sobre a prática e o trabalho colaborativo entre os docentes foram aspectos relevantes de sua formação contínua.

Como um exemplo prático dessa formação, citamos algumas ideias conjuntas dos professores visando à melhoria de suas atuações:

- reuniões pedagógicas semanais e encontros informais na escola para discutir ações pautadas pelos questionamentos recentes dos alunos;
- ii. definição de critérios comuns de avaliação, de forma a equilibrar as expectativas das diferentes disciplinas envolvidas, usar notas médias em comum e reduzir a carga de trabalhos paralelos para os alunos.

Trabalhando em grupos de colaboração, cada professor pôde enxergar seu papel dentro do projeto. Foi a professora de Língua Portuguesa quem convidou a professora de Matemática a participar do projeto, e esta viu a chance de trabalhar assuntos da Geometria via elaboração de maquetes dos cenários da situação-problema; foram os alunos que procuraram o professor de Física para questioná-lo e solicitar ajuda em temas específicos do cenário que investigavam, como eletromagnetismo, por exemplo; foi o professor de Informática quem convidou a professora de Língua Portuguesa a ajudar os alunos na redação do texto científico das monografias, e foi este professor quem trouxe a ideia inicial da proposta de Trabalho de Conclusão de Curso, que tem sido formulada até hoje por todos do grupo.

Devido ao exposto, constatamos que a atividade de ensino oferece oportunidade de aprendizagem não apenas para o aluno, mas também para o professor. Mais do que um ambiente para se frequentar, a escola deve ser um espaço de promoção da autonomia dos alunos, de formação de futuros cidadãos críticos, capazes ao trabalho em colaboração. Essa instituição deve ser inclusiva e focar no desenvolvimento pleno dos indivíduos dela participantes.

Referências

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 9050:2004* – Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. 31 maio 2004. Disponível em: http://www.pessoacomdeficiencia.gov.br/app/sites/default/files/arquivos/%5Bfield_generico_imagens-filefield-description%5D_24.pdf>. Acesso em: 22 fev. 2016.

ACRE. Secretaria de Estado de Educação e Esporte. *Centro de apoio ao deficiente visual anuncia vagas para cursos na capital.* 4 set. 2015. Disponível em: http://www.see.ac.gov.br/portal/index.php/noticias-em-geral/34-slideshow/338-centro-deapoio-ao-deficiente-visual-anuncia-vagas-paracursos-na-capital>. Acesso em: 22 fev. 2016.

AMARAL, Graziele Kelly; FERREIRA, Amauri Carlos; DICKMAN, Adriana Gomes. Educação de Estudantes Cegos na Escola Inclusiva: O Ensino de Física. In: XVIII SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE FÍSICA, 26-30 jan. 2009, Vitória. *Anais eletrônicos*. Vitória, 2009. Disponível em: http://www.cienciamao.usp.br/dados/snef/educacaodeestudantescego.trabalho.pdf>. Acesso em: 22 fev. 2016.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 23 dez. 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/l9394.htm. Acesso em: 23 fev. 2016.

_____. Ministério da Educação e Cultura. Atendimento Educacional Especializado – Deficiente Visual. 2007. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/aee_dv.pdf>. Acesso em: 20 fev. 2016.

_____. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2000. Disponível

em: Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2016.

CARVALHO, Thomas. Espectro Eletromagnético. Disponível em: http://www.infoescola.com/fisica/espectro-eletromagnetico/ Acesso em 22 Ago. 2016

COMPARTILHANDO SABERES. *Educação Inclusiva e Educação Especial*. 18 fev. 2015. Disponível em: http://www.compartilhandosaberes.com.br/educacao-inclusiva-e-educacao-especial/. Acesso em: 22 fev. 2016.

ESCRIVÃO FILHO, Edmundo; RIBEIRO, Luís Roberto de Camargo. Aprendendo com PBL – Aprendizagem Baseada em Problemas: relato de uma experiência em cursos de engenharia da EESC-USP. *Pesquisa e Tecnologia* – Minerva, São Carlos, v. 6, n. 1, p. 23-30, jan./abr. 2009.

HAGAH. Piso tátil garante segurança e acessibilidade para pessoas com deficiência visual. Disponível em: https://www.hagah.com.br/roteiros/piso-tatil-garante-seguranca-e-acessibilidade-para-pessoas-com-deficiencia-visual> Acesso em 22 Ago. 2016.

MACHADO, Ana Carolina Silva; STRIEDER, Roseline Beatriz. *Ensino de física para deficientes visuais*: uma revisão a partir de trabalhos em eventos. Brasília: Universidade Católica de Brasília, 2010.

MORENO, Ana Carolina. Professor cego mostra em livro como ensinar física para quem não enxerga. *G1.* 3 nov. 2013. Disponível em: http://g1.globo.com/educacao/noticia/2013/09/professor-cego-mostra-em-livro-como-ensinar-fisica-para-quem-nao-enxerga.html>. Acesso em: 22 fev. 2016.

SALMAZO, Ricardo Silva. Análise da Socialização entre Videntes e Cegos Durante Aulas de Física em uma Escola Polo de Santo André. 2015. f. 203. Dissertação (Mestrado em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática) – Centro de Ciências Naturais e Humanas, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2015.

______.; RODRIGUES, Maria Inês Ribas. Ampliando os conhecimentos de futuros professores no ensino de Física para cegos. In: XXXI ENCONTRO DE FÍSICOS DO NORTE E NORDESTE, 20 jun. 2013. Campina Grande. *Anais Eletrônico*. Campina Grande, 2013.

A coleção *O que é ser Cientista?* foi concebida com o intuito de divulgar a ciência e estimular estudantes para esta profissão.

A coleção é composta por obras de diversas temáticas e busca demonstrar, por meio de linguagem clara e acessível, experimentos, aplicações, desafios e áreas de atuação para o cientista.

